

THESES DE DOCTORAT D'ETAT ES-SCIENCES PHYSIQUES

présentées

A L'UNIVERSITE DE PARIS VI

par

DANG VAN KY

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES

—
Première thèse

SUR LA RESISTANCE A LA FATIGUE DES METAUX

—
Deuxième thèse

PROPOSITION DONNEE PAR LA FACULTE

Soutenues le 28 Avril 1971 devant la Commission d'Examen

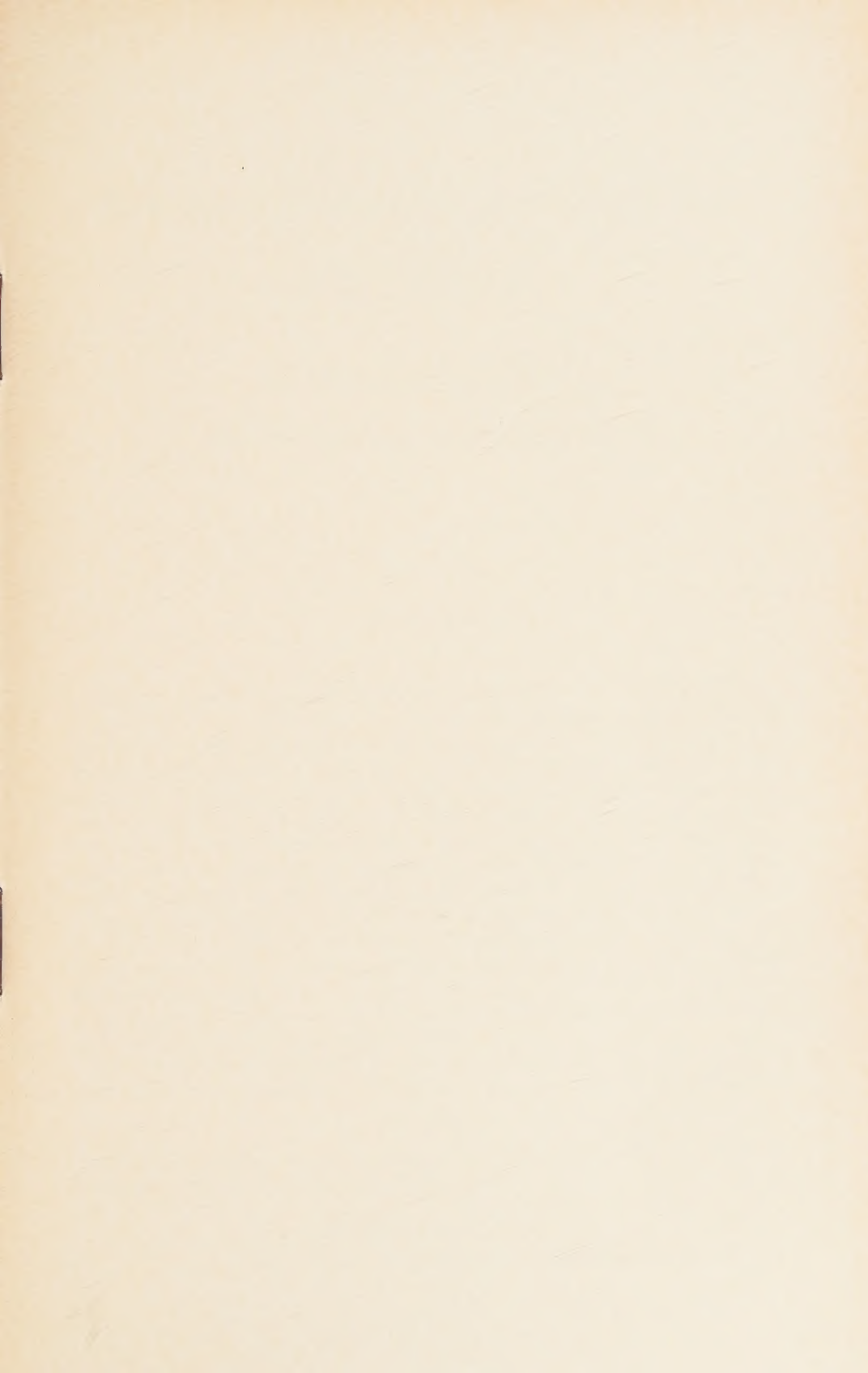
MM. R. SIESTRUNCK . Président

J. MANDEL. . .

R. MAZET . . .

D. RADENKOVIC

} Examineurs





Digitized by the Internet Archive
in 2026

SUR LA RÉSISTANCE A LA FATIGUE DES MÉTAUX

(On metals resistance to fatigue)

(Über die Ermüdungsfestigkeit der Metalle)

par

K. DANG VAN ⁽¹⁾

RÉSUMÉ. — On se propose de chercher des méthodes de calcul à la fatigue d'éléments soumis à des cycles de contraintes complexes répétitifs. On s'intéresse plus particulièrement pour un trajet de charge donné à l'endurance. L'étude a été effectuée à l'aide d'un modèle qui peut être résumé de la façon suivante : l'endommagement du matériau se produit à partir de l'état écroui dans les grains les plus défavorablement orientés si, à un instant donné au moins du cycle de chargement, les contraintes locales dans ces grains sont suffisantes pour provoquer la formation de vides. On interprète ce mécanisme comme la montée de dislocations avec variation de volume positive. Pour un trajet de charge donné, on évalue les contraintes locales en généralisant le modèle d'Orowan. En se limitant ensuite au cas d'un métal c.f.c., on retrouve par le calcul l'allure des courbes d'endurance pour différents trajets de charge envisagés jusqu'à présent en fatigue. A partir de ces études, on propose un critère pratique approché qui fait intervenir à la fois le cisaillement et la pression hydrostatique concomittante.

Le problème de la concentration des contraintes est examiné. On développe notamment deux nouvelles méthodes possibles pour calculer les contraintes

(1) Ingénieur E.N.P.C., Docteur ès sciences, Laboratoire de Mécanique des Solides de l'École polytechnique, 17, rue Descartes, Paris.

au voisinage d'une inclusion située dans un matériau élastique et d'une fissure dans un milieu élastoplastique.

Comme application on a étudié le problème de la fatigue interne des rails sous l'action du roulement des roues chargées.

SUMMARY. — *An attempt is made to develop methods of analysis of structural elements submitted to fatigue by complex repetitive cycles of stress. We are more particularly interested in the endurance limit for a given loading path. The study was made with the help of a model which can be summarised in the following way: the damaging of the material occurs, after the completion of the hardening, in the most unfavorably oriented grains if at one instant at least of the stress cycle, the local stresses in these grains are high enough to cause the formation of voids. This mechanism is interpreted as the climb of dislocations with positive volume variation. For a given loading path, the local stresses are evaluated by generalising Orowan's model. Restricting in what follows the investigation to the case of F.C.C. metals, the calculations lead to endurance curves of the same general form as those which were obtained by experiments for different loading paths in fatigue which have been considered up to now. On the basis of these studies a practical approximate criterion of fatigue is proposed in which both the shearing stress and the concomitant hydrostatic pressure intervene.*

ZUSAMMENFASSUNG. — *Es wird versucht Methoden für die Berechnung der Ermüdungsfestigkeit von Teilen zu finden, die wiederholten zusammengesetzten Spannungszyklen ausgesetzt sind. Insbesondere interessiert uns in diesen Zusammenhang die Dauerfestigkeit für ein vorgegebener Belastungsweg. Die Untersuchung wurde mit Hilfe eines Modells durchgeführt, das sich wie folgt zusammenfassen lässt: die Beschädigung des Werkstoffs erfolgt von festigten Zustand ausgehend an den am ungünstigsten orientierten Körnern, wenn wenigstens zu einem bestimmten Zeitpunkt des Belastungszyklus örtliche Spannungen in diesen Körnern hoch genug sind um die Bildung von Leerstellen zu ermöglichen. Dieser Mechanismus lässt sich darstellen als Klettern der Versetzungen mit positiven Volumensänderung. Für einen gegebenen Belastungsweg werden die örtlichen Spannungen durch Verallgemeinerung des Orowanschen Modells abgeschätzt. Beschränkt man sich dann auf den Fall eines kubisch-flächenzentrierten Metalls, so ergibt die Rechnung den bekannten Verlauf der Dauerfestigkeitskurven für verschiedene bis jetzt in Dauerversuchen betrachtete Belastungswege. Von diesen Untersuchungen ausgehend, wird ein praktisches Näherungskriterium vorgeschlagen, das sowohl die Scherspannungen als auch die gleichzeitig wirkenden hydrostatischen Druck berücksichtigt.*

Das Problem der Spannungskonzentration wird behandelt. Insbesondere werden zwei neue Methoden entwickelt, die es gestatten, die Spannungen in der Nähe eines Einschlusses in einem elastischen Werkstoff sowie eines Risses in einem elastoplastischen Medium zu berechnen.

Als Anwendungsbeispiel wird das Problem der Ermüdung im Schienenkopfe durch das Rollen belasteter Räder untersucht.



INTRODUCTION

POSITION DU PROBLÈME.

Des pièces soumises à des contraintes variables au cours du temps peuvent se rompre alors qu'à aucun moment de leur histoire de charge les contraintes appliquées calculées n'ont été très importantes. Elles sont inférieures à la limite de rupture statique et même à la limite de l'écoulement macroscopique du matériau; les fissures se propagent sans qu'il y ait de déformation plastique macroscopique apparente. Les résultats des essais sont soumis à une certaine dispersion statistique. C'est la rupture par fatigue.

Dans les expériences réalisées en laboratoire pour étudier ce phénomène, les sollicitations imposées sont en général des superpositions d'efforts variables autour d'une valeur moyenne (ou statique) de même nature et de même direction; les sollicitations les plus fréquentes sont les tractions, les flexions et les torsions. Quelle que soit la nature des efforts agissant on distingue normalement trois types d'expériences (cf. par exemple réf. [5], p. 115): sollicitations alternées avec la valeur moyenne nulle; répétées entre zéro et une valeur donnée: ondulées autour d'une valeur moyenne non nulle, la valeur maximale ou minimale étant différente de zéro.

A un niveau de contrainte maximale S donné et pour un essai déterminé, le matériau se rompt après l'application d'un certain nombre de cycles de charge N . En portant S en fonction de N , on obtient la courbe SN ou courbe de Wöhler. Cette courbe tend vers une asymptote pour N grand et la valeur de $S = S_l$ correspondante est appelée limite d'endurance ou limite de fatigue pour la sollicitation considérée. Cette valeur a une grande importance pratique car elle correspond à l'amplitude maximale de la contrainte appliquée pour laquelle il n'y aura pas rupture.

On pourra encore pour des trajets de charge bien précisés définir la notion de surface d'endurance à l'intérieur de laquelle sont contenus tous les trajets n'entraînant pas la rupture. Pour des trajets de charge radiaux à partir d'une valeur moyenne donnée, c'est l'ensemble des limites d'endurance dans différentes directions de l'espace des contraintes, à partir de la moyenne donnée.

Lorsque les trajets de charge sont plus complexes, on ne peut plus donner de définition précise de la limite d'endurance ni de la surface d'endurance.

Le problème de la fatigue peut être posé sous la forme générale suivante: dans l'espace des contraintes, on envisage des trajets de charge cycliques, plus ou moins réguliers, entièrement situés à l'intérieur du domaine de la rupture statique; on cherche à distinguer les trajets au cours desquels la rupture se produit après un nombre suffisant de cycles et ceux au cours desquels aucun endommagement ne survient.

Jusqu'à présent, les méthodes d'études utilisées sont généralement des méthodes expérimentales.

Ce sont :

— les essais dans lesquels les contraintes dépendent d'un seul paramètre (traction, flexion ou torsion). Les résultats qu'on obtient suffisent la plupart du temps pour les besoins de la pratique;

— les essais en contraintes complexes avec des trajets de charge radiaux (éprouvettes soumises à des flexions torsions simultanées, tubes soumis à des pressions internes cycliques, éprouvettes soumises à une pression hydrostatique constante et à des tractions ou torsions ondulées).

L'interprétation des résultats pour déduire un critère général est incertaine car la fatigue résulte de plusieurs facteurs entremêlés impossibles à séparer de façon quantitative par l'expérience. De plus, sans d'autres considérations d'ordre théorique, les formulations des critères dépendent des coordonnées choisies. Ainsi, dans les expériences de flexion torsion alternée, on peut noter l'amplitude de la contrainte alternée exercée sur l'éprouvette; on obtient alors une courbe ressemblant à la courbe intrinsèque de Mohr-Caquot. On peut également calculer les maximums des contraintes de cisaillement alternées, ce qui donne une courbe ayant l'allure d'une demi ellipse de Mises, souvent appelée par confusion critère de Mises en fatigue ⁽¹⁾ (cf. § II.1.2).

Les différents critères de fatigue en contraintes complexes proposés à ce jour, à partir des expériences plus ou moins précises avec des trajets de charge particuliers bien déterminés ne peuvent être étendus à des trajets de charge plus complexes sans d'autres considérations qui puissent les justifier. Étant donné la très grande difficulté, sinon l'impossibilité d'effectuer des expériences pour trouver des critères de rupture par fatigue, des chercheurs ont essayé de trouver des modèles physiquement raisonnables avec l'espoir de remplacer par le calcul ce que l'expérience ne peut fournir. La validité d'un modèle se jugera surtout sur la manière par laquelle sont rendus compte les divers faits observés pendant les périodes de vie d'un échantillon soumis à la fatigue.

A part des modèles physiques, on peut mentionner les théories statistiques que nous laissons de côté car elles sont assez éloignées de la réalité physique du matériau.

On admet généralement que la durée de vie se divise en quatre périodes distinctes :

i. La première qui s'étend sur un nombre n_1 de cycles correspond à l'achèvement de l'écrouissage des grains; lorsqu'on est au voisinage de la limite d'endurance, n_1 est petit vis-à-vis du nombre de cycles nécessaire pour entraîner la rupture;

ii. Pendant la deuxième période de n_2 cycles se produit la formation de microfissures dans les bandes de glissements qui affaibliront le cristal des grains;

(1) Confusion qui peut induire en erreur. En effet, le critère de plasticité de Mises ou le critère de rupture de Mohr-Caquot ont une signification physique claire car ils permettent de définir l'état de contrainte précédent l'écoulement plastique et la rupture. Il n'en est pas de même des critères dits du type de Mohr-Caquot, ou de Mises en fatigue qui ne sont valables que pour certains trajets de charge spéciaux.

iii. La troisième période qui occupe un nombre n_3 de cycles voit les microfissures se joindre pour former des fissures de tailles détectables. Ces fissures en s'étendant constitueront la fissure macroscopique;

iv. La quatrième période est celle de la propagation de la macrofissure jusqu'à la rupture finale.

On peut classer les modèles proposés en deux catégories : ceux qui étudient la nucléation des fissures; ceux qui concernent la propagation des fissures de fatigue. A ces dernières peuvent également être rattachés les études et calculs effectués sur les contraintes et les déformations à l'extrémité d'une fissure. Les hypothèses de bases sont soit les hypothèses classiques de la plasticité, soit les hypothèses introduites dans le cadre de la théorie des dislocations.

Parmi les modèles de nucléation des fissures de fatigue, le premier à citer est le modèle unidimensionnel d'OROWAN [32]. Il s'appuie sur la théorie de la plasticité. Bien que l'intention initiale de l'auteur est d'expliquer la formation des fissures de fatigue, son schéma s'applique en fait à l'étude de l'écrouissage du métal, sous l'action de chargements cycliques.

Les autres modèles de nucléation reposent sur la théorie des dislocations. Dans une première catégorie que nous ne citerons que pour mémoire car ils ne sont que qualitatifs, on cherche à expliquer les phénomènes d'intrusion et d'extrusion de métal qu'on peut souvent observer sur les surfaces des échantillons soumis à la fatigue. Ce sont les mécanismes de COTTREL-HULL [6], de MOTT [28], de MAY [26], de THOMPSON [43], de WOOD [45], tous basés sur des processus ne faisant pas intervenir la pression hydrostatique qui on le sait, joue un rôle très important dans la rupture par fatigue.

Une deuxième catégorie de modèles attribue un rôle fondamental aux activations thermiques. Ce sont les modèles de MACHLIN [24], de YOKOBORI [46]. Le premier attribue un rôle fondamental à la création des boucles de dislocations supposée thermiquement activée ce qui est infirmé par les calculs de DORN-SIMMONS-CAMPBELL [9].

HEAD [18] partant des mêmes hypothèses qu'Orowan, propose un modèle unidimensionnel de propagation des fissures de fatigue.

D'autres modèles concernant la propagation sont basés sur la théorie des dislocations. Le modèle de base est celui de BILBY-COTTRELL-SWINDEN [1], proposé pour étudier les ruptures semi-fragiles dans les métaux. Ces auteurs ont remplacé la fissure soumise à un cisaillement à l'infini par une distribution continue de dislocations équivalentes; le problème de la stabilité de la fissure est alors traitée comme un problème d'équilibre des dislocations sous l'action des contraintes extérieures. L'adaptation pour étudier la propagation des fissures de fatigue a été effectuée par WEERTMANN [44] et LARDNER [22]. Sans entrer dans les détails, notons que ces applications sont assez discutables et que de plus elles présentent les mêmes inconvénients que le modèle de Head à cause de leur caractère unidimensionnel. Quoiqu'il en soit ces modèles ainsi que ceux qui sont fondés sur des calculs élastoplastiques ne peuvent pas rendre compte des faits observés: la propagation des fissures de fatigue à ses débuts est discontinue; très souvent ce sont des petites fissures formées lors de la phase de nucléation qui en rejoignant la fissure principale contribuent à sa propagation.

Lorsque la macrofissure atteint une taille suffisante, des concentrations de contraintes importantes se produisent entraînant des déformations plastiques à son extrémité. Dans cette phase de l'étude, il est nécessaire de connaître la distribution des contraintes et des déformations en tête d'une fissure dans un milieu élasto-plastique. Pour cela, des calculs ont été effectués lorsqu'il s'agit d'un chargement monotone par HULT et MC CLINTOCK [19] pour des matériaux parfaitement plastiques et par NEUBER [30] et RICE [35] pour des matériaux écrouissables, le cas d'une fissure soumise à une tension à l'infini est décrite de façon approchée par le modèle de DUGDALE [10]; enfin récemment des calculs plus poussés ont été effectués par RICE-ROSENGREEN [36] et HUTCHINSON [20]. Le matériau étant à écrouissage parabolique et obéissant à la loi de Hencky.

A cause de la complexité du calcul, seul le cas de chargement monotone a été jusqu'à présent étudié.

PLAN DE L'ÉTUDE.

Le premier chapitre est consacré à l'étude de la nucléation des fissures de fatigue dans les métaux. Les théories proposées jusqu'à présent sont à un paramètre excepté celle de Yokobori où une tentative a été faite pour tenir compte des trajets de charge plus complexes. Nous proposons ici un modèle nouveau suggéré par la théorie des dislocations qui permet en principe le calcul pour des trajets de charge quelconque. En plus des caractéristiques du cycle des contraintes, ce modèle rend également compte de l'influence de la pression hydrostatique. Il nous a été possible de calculer les courbes d'endurance pour différents trajets de charge radiaux correspondant aux expériences courantes ainsi que pour quelques trajets plus complexes pour lesquels les expériences existent. Le modèle proposé s'inspire de celui d'Orowan pour la phase d'écrouissage et de celui de Yokobori pour la phase de nucléation.

Nous décrivons le modèle proposé dans le paragraphe I.1, et étudions ensuite la nucléation des microfissures dans le monocristal (§ I.2). Nous supposons que les contraintes imposées ne sont pas très élevées et par conséquent que les déformations plastiques macroscopiques sont négligeables; les déformations totales de chaque grain sont égales aux déformations élastiques macroscopiques. Certains grains défavorablement orientés subissent d'abord un écrouissage dû à l'augmentation de la densité de dislocations; des crans se forment lors de croisements de systèmes de dislocations différents; ensuite se produit la montée lente de ces crans. Pour des pressions hydrostatiques peu élevées, ce processus peut provoquer l'augmentation de la densité de lacunes qui en coalescent mutuellement forment des microfissures.

Nous adoptons le critère suivant :

Pour que le mécanisme en jeu soit actif, il faut que la contrainte locale dans les grains mal orientés dépasse un seuil au cours d'une partie de chaque cycle, et, en plus, que la variation de volume soit positive ce qui justement fait intervenir la pression hydrostatique (critère d'endommagement I.3 ou I.22).

Dans le paragraphe I.3, nous évaluons l'état de contrainte dans les grains les plus défavorablement orientés. Nous supposons que le métal considéré est suffisamment ductile et que les métaux constitutifs ont un écrouissage isotrope; nous ferons également l'hypothèse qu'un seul système intervient dans chaque grain, hypothèse plausible car les contraintes appliquées sont peu importantes. A titre d'exemple nous traitons les cas suivants : cisaillement pur ondulé, traction ondulée, sollicitations répétées en cisaillement pur concomitant avec une pression hydrostatique, effort répété en contraintes planes, le trajet de charge dépendant d'un seul paramètre.

Pour un métal C.F.C. nous calculons dans le paragraphe I.4, les limites d'endurance correspondant aux trajets de charge précédents. Pour simplifier, nous n'avons considéré qu'un petit nombre de plans de montée. Ces plans sont déterminés par la ligne de dislocation et des positions atomiques voisines. L'application du critère d'endommagement nous a permis de retrouver l'allure des différentes courbes expérimentales existantes.

Au début du deuxième chapitre (§ II.1), nous comparons les critères de fatigue proposés jusqu'à présent; nous donnons ensuite quelques justifications expérimentales en juxtaposant les résultats de divers essais de fatigue connus sur différents métaux (§ II.2).

Le troisième chapitre est consacré aux problèmes de la concentration de contraintes et de la propagation des fissures. Nous étudierons dans (III.1) les problèmes qui doivent être examinés pour définir correctement les concentrations de contraintes. Supposant que le matériau est élastique, nous proposons une méthode générale de calcul de la concentration des contraintes autour d'une inclusion (III.2.1) en nous inspirant d'un travail de BUI [2]. Pour le cas d'une fissure dans un matériau élastoplastique, un calcul peut également être fait pour déterminer la distribution des contraintes lorsque le chargement est monotone (III.2.2). La méthode proposée s'appuie sur une étude antérieure effectuée en collaboration avec BUI [3].

Dans III.3, nous rappelons les observations faites sur les directions de propagation des fissures de fatigue.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude du problème de rupture par fatigue des rails sous le trafic. Il s'agit d'un problème de fatigue sous chargement très complexe. La fissure se forme à partir d'un défaut situé dans une zone profonde (8 à 16 mm de la table de roulement) où le niveau des contraintes est relativement faible. La zone supérieure proche de la surface (3 à 5 mm), bien que fortement écrouie est en général à l'abri de la fatigue. Les critères classiques ne permettent pas de comprendre ce phénomène car ils ne tiennent pas proprement compte de l'influence de la pression hydrostatique dans le cycle de charge. L'utilisation du critère macroscopique approché résultant de notre étude est mieux adapté. Pour l'appliquer on détermine le cycle de contraintes élastiques qui se superpose sur un champ de contraintes résiduelles et éventuellement thermiques.

CHAPITRE I

MODÈLE DE NUCLÉATION DES FISSURES DE FATIGUE

I.1. DESCRIPTION DU MODÈLE.

Les observations au microscope et l'inspection aux rayons X des échantillons (cf. travaux de GOUGH [15], BULLEN-HEAD et WOOD [4], SINCLAIR-DOLAN [38], FORSYTH [13]...) ont permis de constater certains faits qui sont à la base du modèle proposé.

Lors de l'application des premières charges au-dessus de la limite d'endurance, on voit la formation de bandes de glissement localisées dans les grains les plus défavorablement orientés. Une grande partie des autres grains ne subit pas de changement. Ces bandes de glissements s'épaississent au cours des cycles ultérieurs et au bout d'un nombre de cycles suffisamment grand, des fissures apparaissent dans les grains; en se rejoignant elles entraîneront la formation de la macrofissure catastrophique.

Les phénomènes de glissement observés dans les grains des échantillons soumis à la fatigue, ne sont pas fondamentalement différents des phénomènes de glissement observés sur des échantillons soumis à des expériences statiques d'écroutissage. Dans ces dernières toutefois, on voit en général une déformation d'ensemble des grains plus importante car le niveau des contraintes appliquées est plus élevé. Il est logique de penser que les modèles proposés pour l'étude de l'écroutissage lors des expériences statiques doivent également s'appliquer *grosso modo* pour l'étude de la fatigue, notamment pour prévoir les contraintes locales dans les grains. Celles-ci doivent être, dans un matériau homogène, du même ordre de grandeur que les contraintes macroscopiques.

D'autre part, des glissements simples, indépendants de la pression hydrostatique ne peuvent à eux seuls expliquer les phénomènes de rupture. En effet, les glissements simples sont dus à des mouvements de dislocations dans leur plan, ce qui revient à une simple translation des positions des atomes. Il faut chercher des mécanismes qui altèrent de façon irréversible la structure du matériau et, étant donné la grande influence de la pression hydrostatique, il faut que ce mécanisme implique un travail contre cette pression.

Ce dernier argument permet de rejeter le glissement dévié qui se fait sans variation de volume.

La montée des dislocations engendre des lacunes ou des atomes interstitiels; elle entraîne donc la variation de volume de matériau et par conséquent elle est influencée par une pression hydrostatique extérieure. Toutefois, le

mécanisme n'est pas irréversible, car une lacune élémentaire peut être annihilée par un atome interstitiel. C'est la présence des contraintes extérieures qui introduit une dissymétrie dans le processus en favorisant un mécanisme par rapport à l'autre. Imaginons en effet que les contraintes imposées créent un excès de lacunes et qu'ainsi un état de déséquilibre s'établit. Les lacunes en sursaturation vont se rassembler au hasard sous l'effet de l'activation thermique et former des embryons qui sont instables lorsqu'ils sont inférieurs à une certaine taille critique. Par contre les embryons qui ont atteint cette taille, qu'on appelle nucléus, ne peuvent plus se redissocier en lacunes élémentaires et vont évoluer ensuite pour former des fissures ⁽¹⁾.

Le modèle que nous proposons constitue une généralisation du modèle d'OROWAN [32] pour l'évaluation de l'écrouissage. Il s'inspire du modèle de YOKOBORI [46] pour la phase de nucléation. On peut en donner l'image générale suivante :

Nous considérons un matériau homogène, isotrope à l'échelle macroscopique, constitué de monocristaux cubiques d'orientation aléatoire. C'est le cas de nombreux aciers, de l'aluminium, du cuivre, etc.

Dans un tel matériau, les premiers cycles entraînent des glissements dans les grains les plus défavorablement orientés; les déformations plastiques dans le restant de la matrice sont négligeables si le niveau des contraintes est faible. Nous nous intéressons aux cycles des contraintes au voisinage de la limite d'endurance (en dessous de la limite élastique macroscopique en général). Nous pouvons schématiquement représenter un grain mal orienté dans le métal par une inclusion élastoplastique entourée d'une matrice élastique. La matrice impose sa déformation au grain, et provoque dans celui-ci un écrouissage important. Les glissements plastiques qui s'y produisent se stabilisent rapidement et on obtient des cycles élastiques au bout d'un petit nombre de sollicitations ($\simeq 10^3$). Pour évaluer l'état de contrainte dans les grains mal orientés en régime établi, nous supposons que le cristal constituant le grain a un écrouissage isotrope (§ I.3, formule I.14). Si le niveau de contrainte au cours du cycle est suffisant, des lacunes peuvent se former par exemple par des processus de diffusion et la coalescence des lacunes donne naissance à des microfissures qui affaiblissent le grain.

Les premiers glissements sont dus à des mouvements de dislocations dans leur plan, ce qui nécessite des contraintes et des énergies relativement faibles. Pendant ces mouvements, le nombre de dislocations ne reste pas constant : certains arcs de dislocations peuvent jouer le rôle de sources et émettre d'autres boucles; d'autres peuvent disparaître par glissement dévié et par montée surtout lorsque les contraintes deviennent importantes. Au début, c'est donc la densité des dislocations qui augmente sous l'effet des contraintes appliquées, entraînant une augmentation de l'écrouissage. D'autre part, pendant ces mouvements, des crans se forment lors de croisement de systèmes de dislocations différents. Au bout d'un certain nombre de cycles, le glissement des dislocations dans leur plan se stabilise car elles sont gênées par les crans formés,

(1) Le mécanisme de formation de microfissure dit par « coalescence de lacunes » a été notamment signalé par ODING en 1955 [31]. Il a été depuis repris par de nombreux auteurs.

et arrêtées par les barrières constituées par d'autres systèmes de dislocations, par les impuretés ou les joints de grains. L'écroutissage est alors pratiquement achevé et l'évolution ultérieure est surtout due aux glissements déviés et aux montées. L'importance de la phase d'écroutissage dépend de la nature des cristaux et des impuretés.

Nous nous intéressons dans notre modèle, à la montée avec formation de lacunes, mécanisme auquel nous attribuons un rôle important dans l'endommagement du matériau. Le processus de montée exigerait s'il se réalise directement des contraintes et des énergies élevées. Parmi les mécanismes de montée possible, celui qui est le plus facile à réaliser est la montée par diffusion de crans. Le cran, lorsqu'il est formé, se propage le long de la ligne de dislocation, et provoque la montée sur une distance suffisante pour que la variation de volume soit au moins égale au volume d'un défaut ponctuel (fig. I.1).

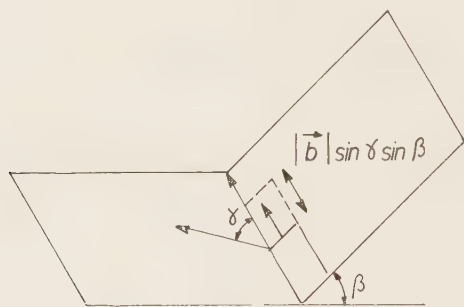


FIG. I.1

Nous postulons que la montée se produit dans un plan donné (distinct du plan de glissement) si la composante sur ce plan de la force qui s'exerce sur la dislocation est supérieur à un seuil qui dépend du plan considéré (§ I.2, formule I.3). Le seuil à vaincre correspond aux actions à distance des autres dislocations sur la dislocation considérée. Une évaluation en a été faite par ZARKA [47] (formule I.2). La montée n'engendre des lacunes que si la variation de volume correspondante est positive. C'est la condition supplémentaire qui doit être vérifiée.

La fatigue ne survient que si la concentration des nucléus est suffisante. Ceci nécessite que la concentration de lacunes en saturation soit maintenue ce qui est réalisé grâce aux cycles de contraintes ⁽¹⁾.

Les microfissures ainsi formées, deviennent en grandissant et en se rejoignant les uns les autres des fissures dans les grains. La macrofissure se développe

⁽¹⁾ Supposons en effet qu'à un instant donné de la phase de nucléation, on arrête l'expérience, et qu'on soumette l'échantillon à une charge statique correspondant à la charge maximale du cycle de fatigue. Les montées se produiront un certain temps entraînant la diminution de la densité de dislocation. Il se produit un radoucissement qui se traduit par une diminution du niveau des contraintes dans le grain car selon le modèle proposé celui-ci subit la déformation constante imposée par la matrice. Le processus de nucléation s'arrête.

dans une région où il y a suffisamment de grains fissurés; en se propageant, elle provoque la rupture finale.

I.2. NUCLÉATION DES MICROFISSURES DANS LE MONOCRISTAL.

Dans ce paragraphe, nous formulons le critère d'endommagement du monocristal. Nous nous proposons ensuite de montrer par un raisonnement qualitatif approché, analogue à celui de YOKOBORI [46] que le nombre de cycles N nécessaires à la formation des fissures augmente lorsque la contrainte appliquée décroît. Nous retrouvons ainsi qualitativement la courbe de Wöhler.

Nous supposons que l'écroûissage des grains mal orientés est achevé c'est-à-dire que les glissements des dislocations dans leur plan sont stabilisés car elles sont bloquées par des obstacles. Le mouvement ultérieur d'une dislocation active considérée se fera dans un plan $M(\beta)$ faisant avec son plan un angle β .

Nous désignons par $\vec{b}$ le vecteur de Burgers d'un système de dislocation que nous supposons actif. Soit $\vec{L}$ le vecteur d'orientation de la ligne et γ l'angle $(\vec{b}, \vec{L})$.

La vitesse de montée avec formation de lacunes de la dislocation est donnée par la formule (cf. réf. [14] p. 104 et réf. [47]);

$$(I.1) \quad f = \frac{Z k T_D}{h} \exp \left\{ - \frac{\Delta S_M}{k} \right\} \exp \left\{ - \frac{1}{k T} (U_{FC} + U_{FL} + U_{DL}) \right\} \\ \left(\exp \frac{|F_{(\beta)} - F_M(\beta)| b^2}{K T \sin \beta \sin \gamma} - \exp \frac{F_s b^2}{K T \sin \beta \sin \gamma} \right)$$

où : ΔS_M est la variation d'entropie due à la montée (en général négligeable);

U_{FC} est l'énergie nécessaire à la formation d'un cran;

U_{FL} l'énergie de formation d'une lacune;

U_{DL} l'énergie pour déplacer la lacune;

Z est le nombre de positions voisines pouvant être occupées par la lacune;

T_D est la température de Debye du cristal;

F_s force chimique de rappel;

$F_{(\beta)}$ est la force agissant sur la dislocation dans le plan de montée $M(\beta)$ due aux contraintes appliquées. Elle est donnée par la formule (cf. réf. [14] p. 35) :

$$F(\beta) = \sigma_{ij} n_i(\beta) b_j$$

où : $n(\beta)$ est la normale au plan de montée $M(\beta)$;

$F_M(\beta)$ est un seuil qui correspond aux actions à distance des autres dislocations (γ') sur la dislocation considérée (γ). ZARKA [47] a donné une estimation du seuil de montée.

$$(I.2) \quad F_M(\beta) = F_{PN}(\beta) + k \sqrt{Dl} \sum_j \left(\sup_j \left| \cos(\gamma' - \gamma) \right|, \left| \cos(\gamma' + \gamma) \right| \right) \\ + 2 \sin \gamma \sin \gamma' \frac{|\sin \beta|}{1 - \nu}$$

Dans cette formule $F_{PN}(\beta)$ est la force de Pierls Nabarro dans la direction β , D est le nombre de dislocations par unité de volume et l est leur longueur moyenne. La quantité Dl est fonction de l'écoulement.

La montée avec formation de lacunes se produit si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$(I.3) \quad \boxed{\begin{aligned} |\sigma_{ij} n_i(\beta) b_j| - F_M(\beta) &\geq F_s \\ dV &\geq 0 \end{aligned}}$$

Le signe de dV est donné par :

$$(I.4) \quad \text{signe } dV = \lambda \left[(\vec{L} \wedge \vec{\xi}) \cdot \vec{b} \right]$$

où $\vec{L}$ est le vecteur d'orientation de la ligne de dislocation considérée et $\vec{\xi}$ son vecteur déplacement.

Les lacunes ainsi formées se rassemblent sous l'effet de l'agitation thermique de façon aléatoire pour former des amas de lacunes ou embryons de taille variable et généralement instables sauf lorsqu'ils ont atteint une taille critique ⁽¹⁾.

En conclusion, le taux de nucléation est de la forme :

$$(I.5) \quad I = A (Dl)^\alpha \frac{k T_D}{h} \exp \left\{ - \frac{1}{k T} (U_{FC} + U_{FI} + U)_{DL} \right\} \\ \left\{ \exp \cdot \frac{|F(\beta) - F_M(\beta)| |b|^2}{k T \sin \beta \sin \gamma} - \exp \frac{\Delta F_S |b|^2}{k T \sin \beta \sin \gamma} \right\}, \quad \alpha > 0$$

Le terme $(Dl)^\alpha$ signifie que plus le nombre de dislocations de longueur moyenne l par unité de volume est grand, plus il existe d'endroits où la montée par diffusion est susceptible de se produire.

Considérons le cas d'une expérience de traction alternée $S(t) = S \sin \omega t$.

Soit N le nombre de cycles nécessaires à la formation de la première fissure qui en se propageant entraînera la rupture. Supposons pour cela que le nombre de lacunes critiques dans un volume V soit n (volume qui correspond à une région pouvant se réduire à quelques grains et où il y a les plus fortes concentrations de contraintes).

⁽¹⁾ En raisonnant dans le cas de la traction, YOKOBORI et al. [46] ont en effet montré que l'énergie de formation d'une cavité sphérique de rayon r passe par un maximum pour une taille optimale donnée et qu'ensuite elle décroît au fur et à mesure que r croît. Au-delà de la taille critique, les défauts auront donc tendance à croître.

Soit θ_t la durée totale correspondant aux N cycles et soit θ_e la durée efficace qui correspond aux périodes pendant lesquelles $F > F_M$. On a la relation suivante entre θ_e et θ_t :

$$\theta_e = \theta_t \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \text{Arc sin} \left(\frac{F_M}{F} \right) \right)$$

pour $F > F_M$, et la relation suivante entre n , I , θ_e , et V :

$$n = I \theta_e V$$

Comme :

$$\omega = \frac{2 \pi N}{\theta_t}$$

nous avons :

$$(I.6) \quad N = \frac{\omega n}{2 \pi I V \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \text{Arc sin} \frac{F_M}{F} \right)}$$

avec $F > F_M$.

La formule I.6 peut être écrite en fonction des contraintes appliquées seulement car Dl caractérise l'écrouissage du métal (cf. réf. 47). Elle est donc fonction du cisaillement maximal appliqué τ . Posons : $Dl = a\tau^m$ pour $\tau > K$, K limite d'écoulement initial. a et m étant de constantes positives; τ est le cisaillement dans le grain en régime établi.

En supposant que l'écrouissage du grain est isotrope, nous montrerons dans le paragraphe suivant que, pour des sollicitations cycliques, Dl est fonction de l'amplitude maximale du cisaillement macroscopique. Pour le cas de la traction alternée $S(t) = S \sin \omega t$ par exemple, $Dl = a \left(\frac{S}{2} \right)^m$ (cf. § 1.3).

L'allure des courbes (S, N) obtenues ressemble aux courbes de Wöhler.

Posons :

$$F = \sigma_{ij} n_i(\beta) b_j = q S$$

$$\frac{b^2}{\sin \beta \sin \gamma} = C$$

et négligeons les forces de rappel chimique F_S , c'est-à-dire prenons :

$$\exp \left\{ \frac{F_S b^2}{k T \sin \beta \sin \gamma} \right\} \simeq 1;$$

N s'écrit sous la forme du produit :

$$N = \frac{\omega n}{2 \pi V k T} \exp \left\{ \frac{1}{k T} (U_{FC} + U_{FL} + U_{DL}) \right\} \left\{ \frac{1}{a A \left(\frac{S}{2} \right)^m Y \left(\frac{S}{2} - K \right) + K^m Y \left(K - \frac{S}{2} \right)} \right\}$$

$$\left\{ \frac{1}{Y (q S - F_M) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \text{Arc sin} \frac{F_M}{q S} \right)} \right\} \left\{ \frac{1}{\exp \frac{c |q S - F_M|}{k T} - 1} \right\}$$

où Y est la fonction d'Heaviside.

Le premier terme du produit est constant.

Les variations des autres termes en fonction de S sont représentées sur les figures I.2. On voit que la variation de N en fonction de S qui résulte des courbes précédentes aura l'allure générale des courbes de Wöhler.

$$S(t) = S \sin \omega t.$$

$$N = \frac{\omega n}{2 \pi V K T} \exp \left\{ -\frac{1}{K T} (U_{FC} + U_{FL} + U_{DL}) \right\} \\ \left\{ \frac{1}{a A \left(\frac{S}{2}\right)^m \gamma \left(\frac{S}{2} - K\right) + K^m \gamma \left(K - \frac{S}{2}\right)} \right\} \\ \left\{ -\frac{1}{\gamma (qS - F_M) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \text{Arc sin } \frac{F_M}{qS}\right)} \right\} \left\{ \frac{1}{\exp \frac{c (qS - F_M)}{K T} - 1} \right\}$$

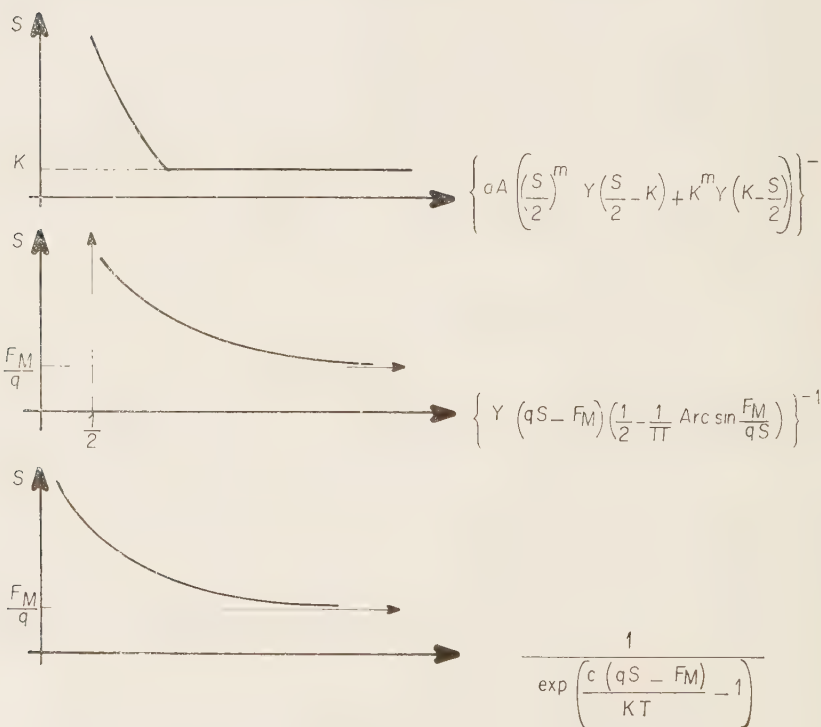


FIG. I.2

Notons que le modèle tient compte de l'influence de la pression hydrostatique. Pour que les lacunes soient produites par montée des dislocations, il faut que la variation de volume correspondante soit positive. En conséquence, une tension favorise le mécanisme tandis qu'une compression hydrostatique la rend plus difficile.

I.3. ÉVALUATION DE L'ÉCROUISSAGE.

La nucléation des microfissures est un phénomène localisé qui intéresse des grains les plus défavorablement orientés dont il s'agit de connaître l'écroutissage et l'état des contraintes. Dans ce but nous allons généraliser dans ce paragraphe le modèle unidimensionnel d'OROWAN [32] pour trouver le tenseur de contraintes locales en régime établi lorsque le trajet de charge est complexe. Nous étudierons ensuite quelques exemples utiles.

Nous supposons que le métal considéré est ductile, c'est-à-dire qu'il peut subir des déformations plastiques assez importantes avant la rupture. C'est le cas de beaucoup d'aciers courants et des métaux à base d'aluminium ou de cuivre; ce n'est pas le cas de la fonte usuelle par exemple.

Il est logique d'utiliser le modèle de Lin-Taï lor pour généraliser la théorie d'Orowan. Ce modèle suppose que la déformation totale ε'_{ij} du grain est égale à la déformation totale macroscopique E'_{ij} , c'est-à-dire :

$$(I.7) \quad \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^e = E_{ij}^p + E_{ij}^e$$

ε_{ij}^p et E_{ij}^p désignent les déformations plastiques;

ε_{ij}^e et E_{ij}^e désignent les déformations élastiques.

Nous négligerons les déformations plastique macroscopiques E_{ij}^p puisque en général au niveau des limites d'endurance, les contraintes appliquées sont assez faibles.

Supposons de plus pour simplifier que le grain et la matrice élastique sont isotropes et ont les mêmes coefficients élastiques. Multipliant alors les deux membres de l'équation (I.7). par le tenseur compliance élastique du matériau Λ_{ij}^{hk} (1), et remarquant que les déformations plastiques se font sans changement de volume ($\varepsilon_{ii}^p = 0$), on obtient :

$$(I.8) \quad \sigma_{ij} + 2 \mu \varepsilon_{ij}^e = \Sigma_{ij}$$

où σ_{ij} est le tenseur de contrainte dans le grain et Σ_{ij} le tenseur des contraintes macroscopiques.

(1) $\Lambda_{ij}^{hk} = \lambda \delta_{ij} \delta_{hk} + \mu (\delta_{ih} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jh})$.

Faisons l'hypothèse qu'un seul mécanisme de glissement est actif ce qui est justifié car les déformations plastiques macroscopiques sont petites. Les contraintes σ_{ij} et les déformations plastiques ε_{ij}^p sont alors reliées au glissement et la cission τ agissant sur le plan du glissement par :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{ij}^p &= \alpha_{ij} \gamma^p \\ \alpha_{ij} \sigma_{ij} &= \tau \end{aligned} \right\}$$

α_{ij} étant la matrice définie par :

$$(I.9) \quad \alpha_{ij} = \frac{1}{2} (m_i n_j + m_j n_i)$$

$\vec{n}$ normale au plan de glissement, $\vec{m}$ direction du glissement.

Multiplions les deux membres de (I.8) par α_{ij} et remarquons que $\alpha_{ij} \alpha_{ij} = \frac{1}{2}$, nous obtenons l'équation valable à tout instant du trajet de charge :

$$(I.10) \quad \tau + \mu \gamma^p = \alpha_{ij} \Sigma_{ij}$$

τ est la contrainte actuelle et γ^p est la déformation plastique actuelle. Admettons pour simplifier encore que le cristal a un écrouissage linéaire et isotrope. Cette hypothèse est justifiée par les expériences de ZARKA [47] et FELTNER [12] rapportées dans le paragraphe II.3. Si $\tau_{s,n}$ désigne le seuil actuel au bout de n cycles et $\tau_{s,0}$ le seuil d'écoulement initial, nous avons la relation suivante :

$$\tau_{s,n} = \tau_{s,0} + C \sum_{i=1}^{n-1} \Delta \gamma_i^p$$

où $\Delta \gamma_i^p = | \gamma_i^p - \gamma_{i-1}^p |$, γ_i^p est la déformation plastique dans le grain au bout de i cycles.

Considérons un cycle de contrainte qui produit sur un plan le plus défavorisé du point de vue du glissement des contraintes macroscopiques de cisaillement ondulé.

$$\alpha_{ij} \Sigma_{ij}(t) = T_0 + T \sin \omega t,$$

et examinons son effet sur les grains les plus défavorablement orientés.

Sur la figure I.3 est représentée l'évolution du seuil $\tau_{s,n}$ en fonction de la déformation plastique γ^p .

Pour la première charge positive ($T_0 + T$) le point figuratif atteint $P_1 (\gamma_1', \tau_1)$. Pendant la charge négative ($T_0 - T$) le grain se comporte élastique-

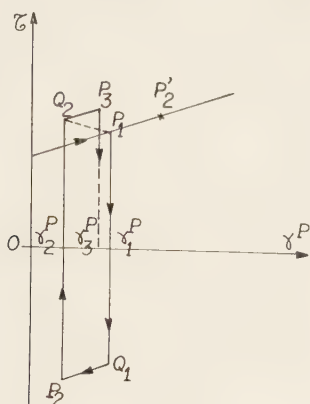


FIG. I.3

ment jusqu'en Q_1 symétrique de P_1 par rapport à l'axe γ^p puis se déforme plastiquement jusqu'en $P_2 (\gamma_2', \tau_2)$. Le point P_2 définit le nouvel état d'écrouissage, notamment le nouveau seuil d'écoulement $|\tau_2|$. Remarquons que $|\tau_2|$ correspond aussi à l'ordonnée du point P'_2 tel que $P_1 P'_2 = Q_1 P_2$. Quand on recharge positivement, le grain se comporte de façon élastique jusqu'au Q_2 puis se déforme plastiquement jusqu'au point P_3 et ainsi de suite.

Dans le cas de sollicitations cycliques produisant des cisaillements ondulés, la déformation plastique dans le grain au bout de n cycles est :

$$(I.11) \quad \gamma_n^p = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} |\Delta \gamma_i^p|$$

Et la loi d'écrouissage du grain est :

$$\tau_{s,n} = \tau + C \sum_{i=1}^{n-1} \Delta \gamma_i^p$$

où $\tau_{s,n}$ est le seuil d'écoulement actuel, seuil qui est positif par définition.

Si l'indice $2q-1$ correspond à la $q^{\text{ième}}$ charge positive tandis que l'indice $2q$ correspond à la $q^{\text{ième}}$ charge négative, τ_{2q-1} et τ_{2q} s'écrivent :

$$(I.12) \quad \left. \begin{aligned} \tau_{2q-1} &= \tau + C \sum_{i=1}^{2q-1} \Delta \gamma_i^p \\ \tau_{2q} &= - \left(\tau + C \sum_{i=1}^{2q} \Delta \gamma_i^p \right) \end{aligned} \right\}$$

La relation (I.10) s'écrit compte tenu de (I.11) et (I.12) :

$$(I.13) \quad \left. \begin{aligned} \tau_s + C \sum_{i=1}^{2q-1} \Delta \gamma_i^p + \mu \sum_{i=1}^{2q-1} (-1)^{i+1} \Delta \gamma_i^p &= T_0 + T \\ -\tau_s - C \sum_{i=1}^{2q} \Delta \gamma_i^p + \mu \sum_{i=1}^{2q} (-1)^{i-1} \Delta \gamma_i^p &= T_0 - T \end{aligned} \right\}$$

Et par addition et en tenant compte de (I.11) :

$$\left. \begin{aligned} - (C + \mu) \Delta \gamma_{2q}^p + 2 \mu \gamma_{2q-1}^p &= 2 T_0 \\ + (C + \mu) \Delta \gamma_{2q+1}^p + 2 \mu \gamma_{2q}^p &= 2 T_0 \end{aligned} \right\}$$

On déduit que :

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow \infty} \gamma_{2q+1}^p &= \lim_{q \rightarrow \infty} \gamma_{2q}^p = \frac{T_0}{\mu} \\ \lim_{q \rightarrow \infty} \tau_{2q+1} &= T \\ \lim_{q \rightarrow \infty} \tau_{2q} &= -T \end{aligned}$$

Le tenseur de contrainte $\sigma_{ij}(t)$ dans le grain en régime établi s'obtient immédiatement par la relation (I.8) et s'écrit :

$$(I.14) \quad \boxed{\sigma_{ij}(t) = \Sigma_{ij}(t) - 2 \alpha_{ij} T_0}$$

REMARQUE 1.

Pour évaluer l'écoulement, nous avons choisi le modèle de Lin-Taylor. En prenant le modèle de KRÖNER [21], on aurait trouvé un état de contrainte établi $\sigma_{ij}(t)$ identique bien que les déformations plastiques ε_{ij}^p soient différentes. Le choix du modèle de Lin-Taylor se justifie par sa forme plus simple et aussi par le fait que les champs introduits sont des champs cinématiquement admissibles, alors que les champs du modèle de Kröner ne sont pas des véritables champs (ni cinématiquement, ni statiquement admissibles).

REMARQUE 2.

Pour évaluer la matrice α_{ij} des grains les plus défavorablement orientés du point de vue du glissement, nous pouvons prendre sans restreindre la généralité du problème un plan d'amplitude de cisaillement maximal particulier. Les grains correspondant sont représentatifs de l'ensemble des grains défavorablement orientés.

REMARQUE 3.

D'après ce modèle, l'état de contrainte dans les grains défavorablement orientés en régime établi coïncide avec l'état de contrainte macroscopique lorsque les sollicitations sont alternées ($T = 0$).

Exemple :

a. *Torsion ondulée d'un tube mince autour d'une valeur moyenne* $T(t) = T_0 + T \sin \omega t$.

On effectue souvent en fatigue des expériences de torsion de cylindre plein. Pour ce genre d'expérience, l'état de contrainte n'est pas homogène, et la contrainte de cisaillement $T(t)$ à considérer est celle qui règne sur la surface du cylindre où elle est maximale. Dans le cas d'expériences sur des tubes assez minces, on peut considérer l'état de contrainte comme homogène $T(t)$ est la cisssion macroscopique agissant sur une section droite. Prenons comme axe en un point du tube $\vec{1}$ rayon vecteur orienté à l'extérieur du tube, $\vec{2}$ orienté suivant la tangente au cercle générateur du tube, $\vec{3}$ dirigé suivant la génératrice du tube, $(\vec{1}, \vec{2}, \vec{3})$ formant un trièdre direct (fig. I.4). Pour

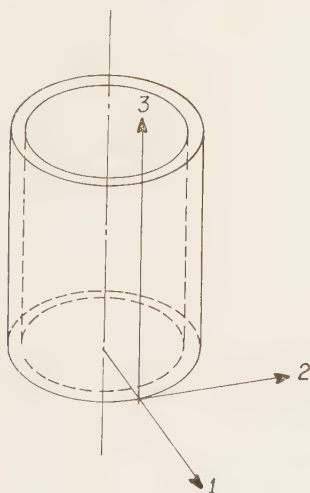


FIG. I.4

évaluer α_{ij} nous prenons $(\vec{3})$ comme normale au plan de glissement et $(\vec{2})$ comme direction de glissement. Le tenseur de contrainte en régime établi dans les grains mal orientés est :

$$(I.15) \quad \sigma_{ij}(t) = T \sin \omega t (\delta_{i2} \delta_{j3} + \delta_{j2} \delta_{i3})$$

tenseur qui ne dépend que de l'amplitude du cisaillement et non du cisaillement moyen T_0 .

b. *Traction ondulée autour d'une traction moyenne* $S(t) = S_0 + S \sin \omega t$ (fig. I.5).

Soit $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ un trièdre lié au solide de façon que la direction de traction coïncide avec $\vec{x}_3$. Par rapport à l'axe de traction, les directions de

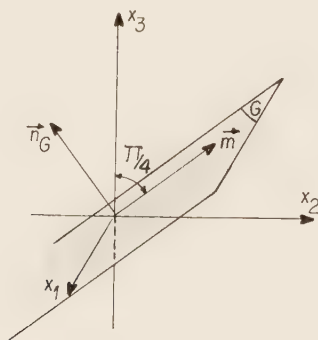


FIG. I.5

cission maximales forment un cône d'axe $\vec{x}_3$ dont l'angle de la direction $\vec{x}_3$ avec une génératrice vaut $\pi/4$. Pour évaluer α_{ij} prenons par exemple le plan défini par $\vec{Ox}_1$ et la direction de glissement $\vec{Om}$, $\vec{Om}$ appartenant au plan (Ox_2, Ox_3) et $(\vec{Ox}_2, \vec{Om}) = \pi/4$.

Le tenseur de contrainte dans le grain considéré en régime établi est :

$$(I.16) \quad \sigma_{ij}(t) = \left(\frac{S_0}{2} + S \sin \omega t \right) \delta_{i3} \delta_{j3} + \frac{S_0}{2} \delta_{i2} \delta_{j2}$$

c. *Éprouvette cylindrique soumise à des expériences de traction torsion alternées simultanées.*

Nous prendrons un système d'axe analogue à celle de la figure I.4, l'origine se trouvant sur la surface latérale du cylindre, la direction de la traction coïncide avec l'axe $(\vec{3})$. Par rapport à ces axes, le tenseur des contraintes dans les grains défavorablement orientés, qui est égal au tenseur des contraintes macroscopiques s'écrit (cf. remarque 3) :

$$(I.17) \quad \sigma_{ij}(t) = (T (\delta_{i2} \delta_{j3} + \delta_{i3} \delta_{j2}) + S \delta_{i3} \delta_{j3}) \sin \omega t$$

d. *Tube épais fermé à ses extrémités soumis à des pressions internes répétées* (fig. I.6).

Le cylindre est repéré dans un système de coordonnées polaires (r, θ, z) noté (1, 2, 3) et est soumis à des pulsations internes $P(t) = \frac{P}{2} (1 + \sin \omega t)$.

La matrice α_{ij} s'écrit :

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2} (\delta_{i2} \delta_{j2} - \delta_{i1} \delta_{j1})$$

Le tenseur de contrainte dans un grain le plus favorablement orienté en régime établi est :

$$(I.18) \quad \sigma_{ij}(t) = \frac{P \sin \omega t}{2(K^2 - 1)} \frac{K^2 R^2}{r^2} (\delta_{i2} \delta_{j2} - \delta_{i1} \delta_{j1}) + \frac{P(t)}{K^2 - 1} \delta_{ij}$$

ou encore :

$$(I.19) \quad T \sin \omega t (\delta_{i2} \delta_{j2} - \delta_{i1} \delta_{j1}) + p(t) \delta_{ij}$$

e. Sollicitations répétées en contrainte plane dépendant d'un paramètre.

Nous nous limitons à des cycles de contraintes planes, cas qui est très important car la plupart des ruptures par fatigue s'amorcent au voisinage de la surface de l'échantillon où le tenseur de contrainte est approximativement plan. Les cas des ruptures internes sont plus rares. Σ_1, Σ_2 étant les contraintes principales, considérons un trajet de charge radial de 0 jusqu'au point (Σ_1, Σ_2) . Deux cas sont à distinguer :

$$(i) \quad \Sigma_1 > \Sigma_2 > 0, \quad \Sigma_3 = 0$$

Si $(\cos \lambda, \cos \mu, \cos \nu)$ sont les cosinus directeurs de la normale au plan de glissement par rapport aux axes principaux des contraintes, on voit immédiatement en utilisant la construction de Mohr qu'un plan de cisssion maximal correspond à :

$$\lambda = \nu = \frac{\pi}{4}, \quad \mu = 0 \text{ (fig. I.7)}$$

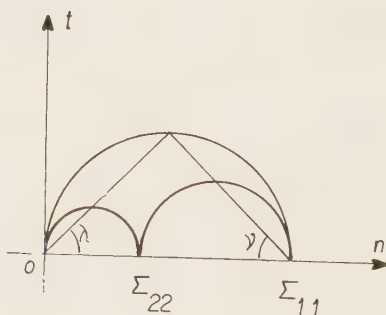


FIG. I.7

La contrainte qui s'exerce sur ce plan est :

$$\left(\Sigma_1 \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0 \right)$$

et la cisssion vaut $\Sigma_1/2$ suivant la direction :

$$\vec{m}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

La matrice α_{ij} est :

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2} (\delta_{i1} \delta_{j1} - \delta_{i3} \delta_{j3})$$

et le tenseur de contrainte locale dans le grain le plus défavorablement orienté en régime établi est :

$$(I.20) \quad \sigma_{ij}(t) = \frac{1}{2} \Sigma_1 \left(\sin \omega t + \frac{1}{2} \right) \delta_{i1} \delta_{j1} + \frac{\Sigma_2}{2} (1 + \sin \omega t) \delta_{i2} \delta_{j2} + \frac{\Sigma_1}{4} \delta_{i3} \delta_{j3}$$

$$(ii) \quad \Sigma_1 > 0, \quad \Sigma_2 < 0, \quad \Sigma_3 = 0.$$

Un plan de cisssion maximal correspond par exemple à (fig. I.8) :

$$\lambda = \mu = \pi/4, \quad \nu = 0$$

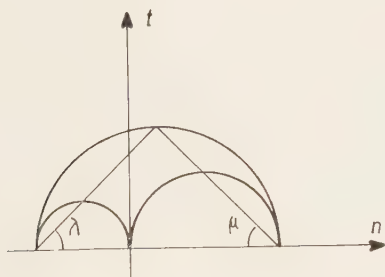


FIG. I.8

Les contraintes qui s'exercent sur ce plan ont pour composantes :

$$\left(\Sigma_1 \frac{\sqrt{2}}{2}, \Sigma_2 \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$$

et la cisssion dans ce plan est :

$$\frac{1}{2} (\Sigma_1 - \Sigma_2)$$

suivant la direction :

$$\vec{m}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

La matrice d'orientation α_{ij} correspondante est :

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2} (\delta_{i1} \delta_{j1} - \delta_{i2} \delta_{j2})$$

et le tenseur de contrainte locale dans le grain le plus défavorablement orienté est :

$$(I.21) \quad \sigma_{ij}(t) = \left(\frac{\Sigma_1}{2} (1 + \sin \omega t) - \frac{\Sigma_1 - \Sigma_2}{4} \right) \delta_{i1} \delta_{j1} \\ + \left(\frac{\Sigma_1 - \Sigma_2}{4} + \frac{\Sigma_2}{2} (1 + \sin \omega t) \right) \delta_{i2} \delta_{j2}$$

I.4. DÉTERMINATION DES LIMITES D'ENDURANCE DANS LE CAS D'UN MÉTAL C.F.C.

La recherche de la limite d'endurance est particulièrement importante dans l'étude de la fatigue.

Selon le modèle proposé, pour que la fatigue se produise, il faut que les contraintes appliquées soient suffisantes pour écrouir les grains les plus défavorablement orientés et provoquer la montée avec formation de lacunes. C'est ce dernier mécanisme qui provoque l'endommagement du matériau. Rappelons le critère d'endommagement adopté déjà mentionné (formule I.3).

A un instant t du cycle de charge, pour que l'endommagement se produise, il faut que la projection sur le plan de montée de la force sur une dislocation située dans le plan de glissement des grains les plus défavorablement orientés soit supérieure à un seuil. Il faut de plus que le mouvement de la dislocation corresponde à une variation de volume positive.

Donnons à partir de I.4 une autre expression du signe de la variation de volume qui sera utile par la suite.

Désignons par $\vec{L}$ le vecteur directeur de la ligne de dislocation considérée, $\vec{b}$ son vecteur de Burgers, $\vec{n}_M$ la normale au plan de montée orientée de telle façon que le trièdre $(\vec{L}, \vec{b}, \vec{n}_M)$ soit direct, et soit $\vec{\eta}$ le vecteur situé dans le plan de montée et défini par (fig. I.9) :

$$\vec{\eta} = \vec{n}_M \wedge \vec{L}$$

Le déplacement $\vec{\xi}$ par montée de la dislocation dans le plan de montée se fera dans le sens de la projection sur ce plan de la force qui s'exerce sur la dislocation soit :

$$(\vec{F}_M \cdot \vec{\eta}) \cdot \vec{\eta} = \frac{1}{2} (\vec{b} \cdot \vec{\sigma} \wedge \vec{L}) \cdot \vec{\eta} \cdot \vec{\eta}$$

D'après (I.4), on a :

$$\text{signe } dV = \text{signe } (\vec{L} \wedge \vec{\xi}) \cdot \vec{b} = \text{signe } \left\{ (\vec{b} \cdot \vec{\sigma} \wedge \vec{L}) \cdot \vec{\eta} \right\} \cdot \left\{ \vec{L}, \vec{\eta}, \vec{b} \right\}.$$

Mais :

$$(\vec{L}, \vec{\eta}, \vec{m}) = -(\vec{L}, \vec{m}, \vec{\eta}) = -\left(\vec{L} \wedge \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right) \cdot \vec{\eta} = -\vec{n}_G \cdot \vec{\eta}$$

où $\vec{n}_G$ est la normale au plan de glissement orientée de telle façon que le trièdre $(\vec{L}, \vec{b}, \vec{n}_G)$ soit direct, d'où :

$$\text{signe } dV = -\text{signe } \left\{ \vec{b} \wedge \vec{L} \cdot \vec{\eta} \right\} \left\{ \vec{n}_G \cdot \vec{\eta} \right\}.$$

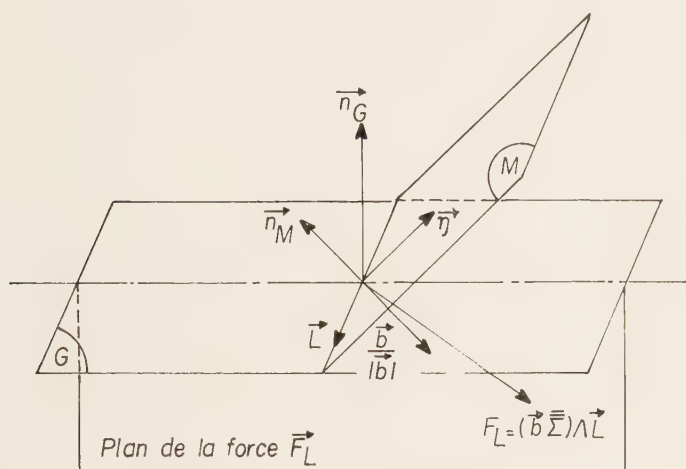


FIG. I.9

On peut voir par un raisonnement géométrique simple que cette dernière expression est équivalente à :

$$\text{signe } dV = -\text{signe } \sin \beta (\sigma_{ij} n_i^v b_j)$$

où n_i^v sont les composantes de la normale au plan de montée, et β est l'angle de $\vec{n}_G$ et de $\vec{n}_M$ ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ En effet, la projection du vecteur dont les composantes sont $(\sigma_{ij} b_j)$ sur le vecteur $\vec{n}_M$ est égale à la projection du vecteur $(\vec{b} \wedge \vec{L})$ sur le vecteur $\vec{\eta}$.

En résumé, les contraintes locales qui provoquent l'endommagement vérifient :

$$(I.22) \quad \boxed{\begin{aligned} &|\sigma_{ij} n_i^m b_j| - (F_M(\beta) + F_S) \geq 0 \\ &\text{signe } dV = - \text{signe } \sin \beta (\sigma_{ij} n_i^m b_j) > 0 \end{aligned}}$$

Remarquons pour la suite de l'étude que le critère proposé ou tout autre critère semblable aurait pu être postulé indépendamment du mécanisme suggéré dans le paragraphe I.1 de la même façon que la loi de Schmidt est à la base de l'étude de la plasticité du polycristal sans qu'il y ait besoin de le justifier par des considérations sur les mouvements des dislocations. Il suffit dans les formules précédentes de remplacer le vecteur de Burgers $\vec{b}$ des dislocations actives par $\vec{m}$ qui caractérise la direction du glissement :

$$m = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

Toutefois, sans les notions physiques des dislocations, ces relations ne sont pas évidentes *a priori*.

A titre d'exemple, calculons à partir des formules (I.22) les limites d'endurance correspondant aux trajets de charge étudiés dans le précédent paragraphe. Nous considérons un métal cubique à face centrée (cas de l'aluminium, du cuivre, etc). Le cas des métaux cubiques centrés (fer, etc.), est plus compliqué car les plans de glissement et de montée possibles sont plus nombreux. Pour simplifier, nous faisons l'hypothèse que pour chaque métal, un seul plan de montée intervient.

Pour un métal c.f.c., les plans de glissement sont les plans (1,1,1). Les observations au microscope électronique montrent que lorsqu'un cristal c.f.c. est suffisamment écroui, les boucles de dislocations contenues dans le cristal sont décomposées en petits segments rectilignes allongés dans des directions privilégiées (1,1,0) correspondant aux arêtes du tétraèdre de Thompson. Le vecteur de Burgers $\vec{b}$ est dans le plan de glissement (face du tétraèdre de Thompson) et fait avec le vecteur directeur de la ligne de dislocation $\vec{L}$ un angle de $\pi/3$ ou $2\pi/3$.

Sur la figure I.10, nous nous fixons le vecteur de Burgers $\vec{b}$ et nous orientons ensuite la ligne de dislocation qui est portée par l'arête AB du tétraèdre.

$\vec{L}$ et $\vec{L}'$ sont les vecteurs directeurs des lignes de dislocations portées par (A B) tels que :

$$\begin{aligned} (\vec{L}, \vec{b}) &= \frac{\pi}{3} \\ (\vec{L}', \vec{b}) &= \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Les plans de montée possibles sont très nombreux. Nous les définissons par ABX, X étant une position atomique quelconque ne se trouvant pas dans le plan de glissement. Dans les exemples numériques que nous traitons, nous nous limitons à quelques positions atomiques voisines car pour des positions plus lointaines la distance de montée est plus grande et par conséquent les énergies à fournir sont plus importantes, (voir fig. I.10).

Nous donnons dans le tableau I les quantités nécessaires au calcul.

Le repérage des normales au plan de glissement $\vec{n}_{GL}$ et $\vec{n}_{GL'}$, est tel que les trièdres $(L, \vec{b}, \vec{n}_{GL})$ et $(L', \vec{b}, \vec{n}_{GL'})$ sont directs. Nous trouvons de cette façon les composantes de n_{GL} et $n_{GL'}$, dans les axes rapportés au cube élémentaire.

TABLEAU I

x	$\vec{n}_{ABX}$	$\vec{n}_{GL} \cdot \vec{n}_{ABX}$	$\vec{n}_{GL'} \cdot \vec{n}_{ABX}$	$\vec{n}_{ABX} \cdot \vec{b}$	$\sin \beta$
C	0, 0, 1.....	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0,816
D	$\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	0,942
E	$\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0,578
F	$\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}$	$-\frac{5}{\sqrt{33}}$	$\frac{5}{\sqrt{33}}$	$-\frac{2}{11}$	0,482
G	$\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}$	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
H	$\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{-3}{\sqrt{11}}$	$\frac{1}{\sqrt{33}}$	$-\frac{1}{\sqrt{33}}$	$\frac{4}{\sqrt{22}}$	0,99

Dans l'application des critères d'endommagement (formules I.22), nous choisissons et orientons les différents vecteurs qui interviennent de la manière suivante :

Nous nous fixons $\vec{n}_G$ qui nous repère le plan de glissement. Rappelons que $\vec{n}_G$ dans les grains mal orientés coïncide avec la normale au plan de glissement macroscopique.

Le vecteur $\vec{b}$ à considérer est orienté en faisant coïncider $\vec{b}/|\vec{b}|$ avec la direction du glissement $\vec{m}$ ou son opposé $\vec{m}_1 = -\vec{m}$. En effet, les systèmes de dislocations dont le vecteur de Burgers coïncident avec $-\vec{m}$ peuvent être actives

pendant la décharge (ou le chargement opposé). Dans ce cas, le vecteur d'orientation de la ligne de dislocation à considérer est $\vec{L}_1 = -\vec{L}$ de telle façon que le trièdre $(\vec{L}_1, \vec{m}_1, \vec{n}_G)$ soit toujours direct.

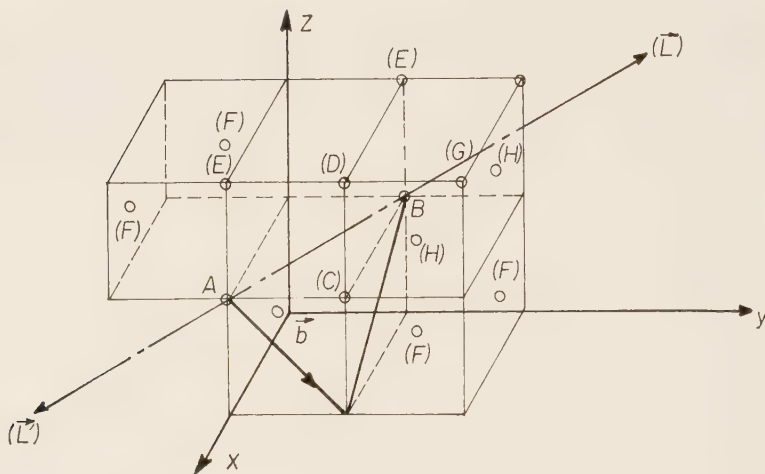


FIG. I.10

Exemples :

a. *Limite d'endurance pour des sollicitations répétées en contraintes planes dépendant d'un seul paramètre.*

Désignons par (u, v, w) les cosinus directeurs de la normale au plan de montée correspondant au système $(\vec{L}, \vec{m})$ dans le repère rattaché aux directions principales du tenseur des contraintes macroscopiques $(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$ (resp. u_1, v_1, w_1) pour le système (L_1, m_1) .

Dans le cas où les contraintes imposées sont $\Sigma_1 > \Sigma_2, \Sigma_3 = 0$, (fig. I.11) les composantes de $\vec{m}$ sont $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et les conditions d'endommagement s'écrivent en tenant compte de (I.20) :

Pour (L, m) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\frac{\Sigma_1}{2} \left(\frac{1}{2} + \sin \omega t \right) u - \frac{\Sigma_1}{4} w \right] - K(\beta) \geq 0 \\ \text{signe } dV = \text{signe} \left\{ -\sin \beta \left[\frac{\Sigma_1}{2} (1 + \sin \omega t) u - \frac{\Sigma_1}{4} w \right] \right\} > 0 \end{array} \right.$$

Pour (L_1, m_1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{2}}{2} \left| \frac{\Sigma_1}{4} w - \frac{\Sigma_1}{2} \left(\frac{1}{2} + \sin \omega t \right) \right| - K(\beta) \geq 0 \\ \text{signe } dV = \text{signe} \left\{ -\sin \beta \left[\frac{\Sigma_1}{4} w - \frac{\Sigma_1}{2} (1 + \sin \omega t) \right] \right\} > 0 \end{array} \right.$$

(Formules I.23)

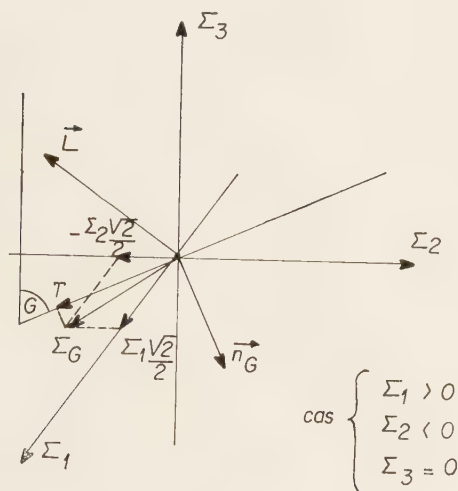


FIG. I.11

Dans le cas où les contraintes macroscopiques sont $\Sigma_1 > 0$, $\Sigma_2 < 0$, $\Sigma_3 = 0$ (fig. I.12), les composantes de $\vec{m}$ sont :

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$$

et les conditions d'endommagement s'écrivent :

(Formules I.24)

Pour $(\vec{L}, \vec{m})$:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2} \left| \left(\frac{\Sigma_1}{2} (1 + \sin \omega t) - \frac{\Sigma_1 - \Sigma_2}{4} \right) u - \left(\frac{\Sigma_2}{2} (1 + \sin \omega t) + \frac{\Sigma_1 - \Sigma_2}{4} \right) v \right| - K(\beta) &\geq 0 \\ \text{signe } dV = \text{signe} \left\{ -\sin \beta \left(\frac{\Sigma_1}{2} (1 + \sin \omega t) - \frac{\Sigma_1 - \Sigma_2}{4} \right) \right. \\ \left. u - \left(\frac{\Sigma_2}{2} (1 + \sin \omega t) + \frac{\Sigma_1 - \Sigma_2}{4} \right) v \right\} &> 0. \end{aligned}$$

Pour $(\vec{L}_1, \vec{m}_1)$:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \left| - \left(\frac{\Sigma_1}{2} (1 + \sin \omega t) - \frac{\Sigma_1 - \Sigma_2}{4} \right) u + \left(\frac{\Sigma_2}{2} (1 + \sin \omega t) + \frac{\Sigma_1 - \Sigma_2}{4} \right) v \right| - K(\beta) \geq 0$$

$$\text{signe } dV = \text{signe} \left\{ -\sin \beta \right\} - \left(\frac{\Sigma_1}{2} (1 + \sin \omega t) - \frac{\Sigma_1 - \Sigma_2}{4} \right) u$$

$$+ \left(\frac{\Sigma_2}{2} (1 + \sin \omega t) + \frac{\Sigma_1 - \Sigma_2}{4} \right) v \left\} > 0$$

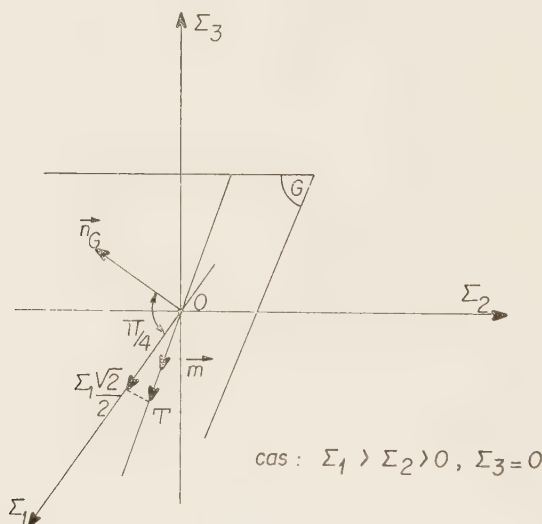


FIG. I.12

Calculons maintenant les composantes (u, v, w) et (u_1, v_1, w_1) dans le repère attaché aux directions principales des contraintes macroscopiques $(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$ des normales $\vec{n}_{ABX}$ aux plans de montée possibles définis précédemment (fig. I.10). Nous nous limitons au cas $\Sigma_1 > 0, \Sigma_2 < 0, \Sigma_3 = 0$, le calcul dans l'autre cas étant tout à fait semblable.

Pour la ligne de dislocation $(\vec{L})$, (u, v, w) sont donnés par les trois équations :

$$\vec{n}_{(1)} \cdot \vec{n}_{ABX} = \frac{\sqrt{2}}{2} (u + v)$$

$$\vec{m} \cdot \vec{n}_{ABX} = \frac{\sqrt{2}}{2} (u - v)$$

$$w = \frac{1}{\sqrt{6}} (v - u)$$

(On obtient la dernière équation en observant que : $\vec{L} \cdot \vec{n}_{ABX} = 0$)
 Pour la ligne de dislocation (L') nous avons :

$$\vec{n}_{GL'} \cdot \vec{n}_{ABX} = \frac{\sqrt{2}}{2} (u + v)$$

$$\vec{m} \cdot \vec{n}_{ABX} = \frac{\sqrt{2}}{2} (u - v)$$

$$w = \frac{1}{\sqrt{6}} (u - v)$$

où les quantités $\vec{n}_{GL} \cdot \vec{n}_{ABX}$, $\vec{n}_{GL'} \cdot \vec{n}_{ABX}$, et $\vec{m} \cdot \vec{n}_{ABX}$ sont données dans le tableau I.

On trouve :

TABLEAU II

Pour L :

Pour L' :

X	u	v	w	X	u	v	w
C	— 0,910	+ 0,092	0,412	B	0,092	+ 0,910	— 0,412
D	+ 0,342	— 0,814	— 0,471	D	+ 0,814	— 0,342	+ 0,471
E	— 0,224	— 0,930	— 0,288	E	+ 0,930	+ 0,224	+ 0,288
F	— 0,915	— 0,315	+ 0,249	F	+ 0,315	+ 0,915	— 0,249
G	+ 0,613	— 0,613	— 0,500	G	+ 0,613	— 0,613	— 0,500
H	+ 0,726	— 0,480	— 0,492	H	+ 0,480	— 0,726	+ 0,492

On peut montrer facilement que (u_1, v_1, w_1) sont reliés à (u, v, w) . On a :
 $u_1 = v, v_1 = u, w_1 = -w$.

Calculons maintenant les seuils de montée $K(\beta)$ correspondant aux différents plans de montée ABX. Pour un métal cubique à face centrée, on a :

$$(I.25) \quad \sum_{\gamma'} \left\{ \sup \left| \cos(\gamma + \gamma') \right|, \left| \cos(\gamma - \gamma') \right| \right\} + 2 \sin \gamma \sin \gamma' \left| \frac{\sin \beta}{1 - \nu} \right\} \\ = 2,5 + \frac{3 \left| \frac{\sin \beta}{1 - \nu} \right|}{1 - \nu}$$

l'évaluation se fait en se fixant :

$$\gamma \left(= \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} \right)$$

et en faisant prendre à γ' toutes les valeurs possibles :

$$\left(0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right).$$

Nous négligeons dans les calculs qui suivent les forces de Pierls-Nabarro comme on le fait généralement dans les modèles étudiant l'écroutissage. Ces forces sont très mal définies au stade actuel des connaissances et leur existence n'a été démontrée que dans très peu de cas (FRIEDEL [14], p. 54-57).

A partir des équations (I.23-24) des valeurs de (u, v, w) , (u_1, v_1, w_1) et de $K(\beta)$, on peut évaluer le domaine d'endurance. Il est défini par le plus petit domaine enveloppe des segments de droite correspondant à la montée avec variation de volume positive (fig. I.13). Ce domaine est défini par (ABF) (ou ABE qui est assez voisin). Pour $|\Sigma_1| > |\Sigma_2|$, l'endommagement a lieu pendant la charge, tandis que pour $|\Sigma_1| < |\Sigma_2|$, il se produit pendant la décharge.

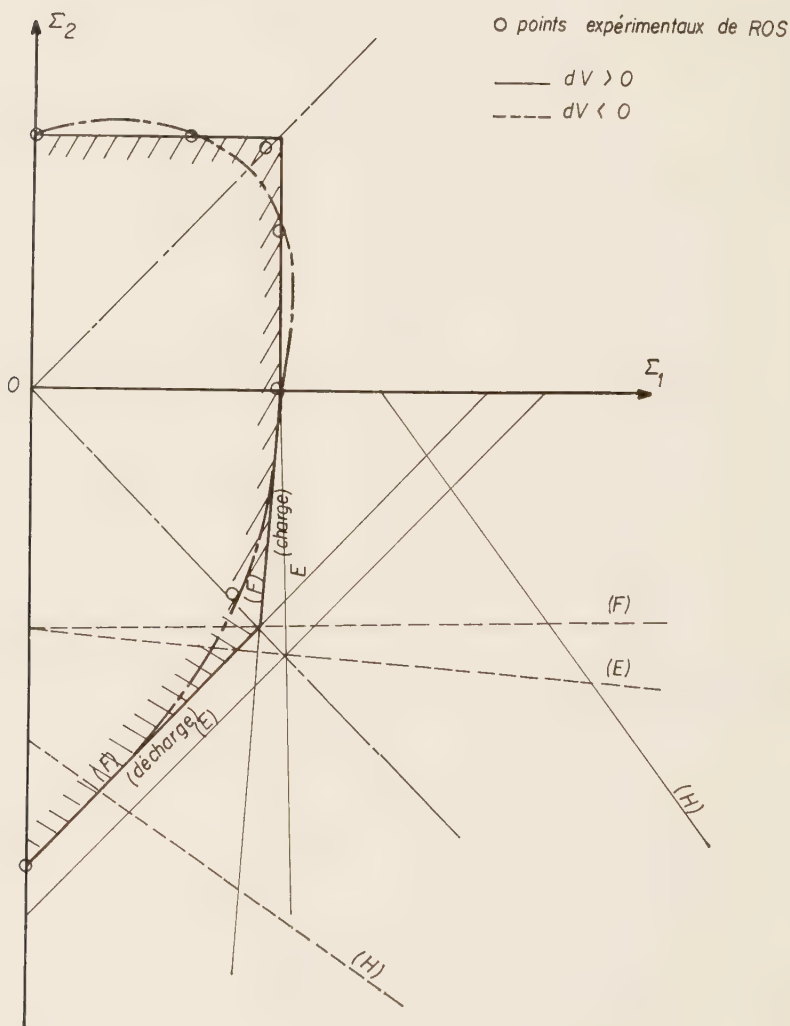


FIG. I.13

La courbe expérimentale obtenue par Ros [37] s'inscrit bien à l'intérieur des segments de droites enveloppes, l'écart maximal correspond au trajet tel que $\Sigma_1 = -\Sigma_2$ (cisaillement pur).

b. *Cas de la traction ondulée autour d'une valeur moyenne.*

Les composantes de $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \vec{m}$ sont par exemple $(0, \varepsilon \frac{\sqrt{2}}{2}, \varepsilon \frac{\sqrt{2}}{2})$. La ligne de dislocation $\vec{L}$ (ou $\vec{L}'$) associée à $\vec{b}$ considérée, se trouve dans le plan de glissement de normale $\vec{n}_G$ $(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ et fait avec le vecteur $\vec{b}$ un angle γ . Le plan de montée est défini par la ligne $\vec{L}$ et la normale $\vec{n}_M$ telle que $\vec{n}_M \cdot \vec{n}_G = \cos \beta$ (fig. I. 14).

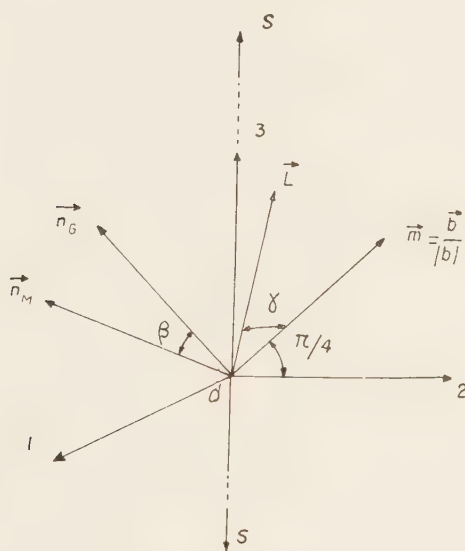


FIG. I.14

La condition de montée et l'expression donnant le signe de la variation de volume correspondant s'écrivent en tenant compte de (I. 16), (I. 22) et (I. 25).

$$(I.26) \quad \left| \frac{S}{2} \sin \omega t (\varepsilon \cos \beta - \sin \beta \sin \gamma) - \frac{S_0}{2} \sin \beta \sin \gamma \right| \geq K(\beta)$$

$$\text{signe } dV = \text{signe} \left\{ -\sin \beta \left[\frac{S}{2} \sin \omega t (\varepsilon \cos \beta - \sin \beta \sin \gamma) - \frac{S_0}{2} \sin \beta \sin \gamma \right] \right\} > 0$$

Sur la figure I. 15, nous représentons dans les coordonnées (S_0, S) les courbes obtenues pour les plans de montée étudiés précédemment. Les droites en trait plein correspondent aux montées avec variation de volume positive et les droites en pointillés sont relatives aux montées avec variation de volume négative. Le domaine d'endurance en traction ondulée est le plus petit domaine défini par les segments de droites enveloppes. On retrouve ainsi l'allure générale des diagrammes classiques de Goodman-Smith en traction ondulée. Notons que les droites enveloppes du domaine d'endurance correspondent surtout au plan de montée ABF (ou ABE qui est voisin).

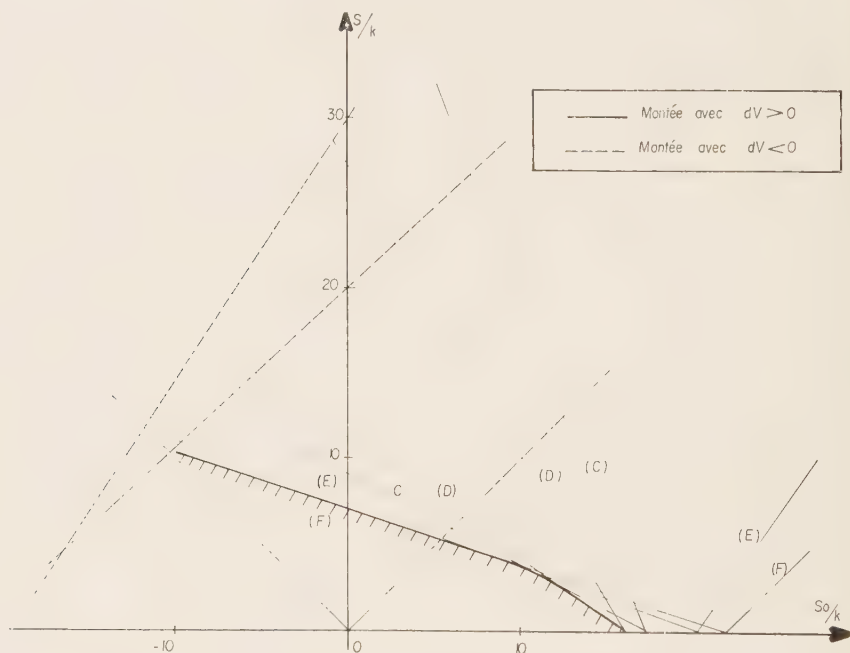


FIG. I.15. — Diagramme de Goodman Smith en traction ondulée

c. Cas de la torsion ondulée.

$\vec{m} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ a pour composante $(0, 1, 0)$, et $\vec{L}$ ou $(\vec{L}')$ est un vecteur du plan $(1, 2)$. La condition de montée s'écrit :

$$(I.27) \quad |\cos \beta T| = K(\beta).$$

Par conséquent, dans le cas d'un cisaillement pur et pourvu que les contraintes (contrainte moyenne + contrainte ondulée) ne soient pas suffisamment importantes pour entraîner des déformations plastiques macroscopiques sensibles, (auquel cas l'évaluation de l'écroutissage que nous avons fait n'est plus valable), la limite d'endurance n'est fonction que de l'amplitude du cisaillement.

d. *Cas de la traction-torsion alternée simultanée.*

Le plan subissant le cisaillement d'amplitude maximale est celui passant par OX_1 et faisant un angle avec Ox_2 tel que :

$$\cos 2\varphi = \frac{T}{R}, \quad \sin 2\varphi = \frac{S}{2R}, \quad R = \frac{\sqrt{S^2 + 4T^2}}{2}.$$

Les composantes du vecteur $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \vec{m}$ sont $(0, \cos \varphi, \sin \varphi)$. La ligne de dislocation $\vec{L}$ (ou $\vec{L}'$) est dans le plan $(OX_1, \vec{m})$ (fig. 1.16).

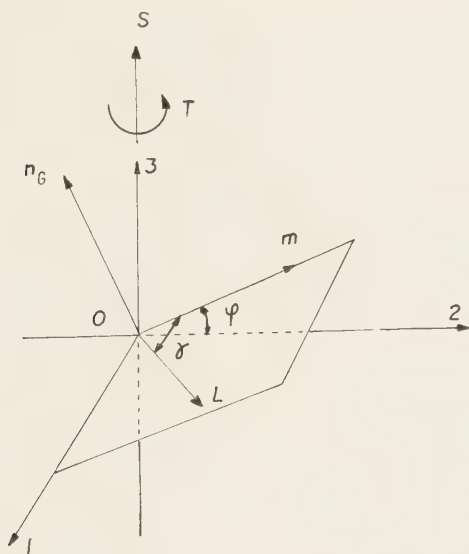


FIG. 1.16

Les conditions de montée avec formation de lacunes s'écrivent pour ce cas :

$$(I.28) \quad \left| \frac{\cos \beta \sqrt{S^2 + 4T^2}}{2} - \frac{S}{2} \sin \beta \sin \gamma \right| \geq K(\beta)$$

$$\text{signe } dV = \text{signe} \left\{ -\sin \beta \left(\cos \beta \sqrt{S^2 + 4T^2} - \sin \beta \sin \gamma \right) \right\} > 0.$$

Selon les plans de montée considérés, les courbes trouvées dans le système d'axe (S, T) sont, soit des portions d'hyperboles, soit des portions d'ellipses (fig. I.17). Les courbes en trait plein correspondent à des montées avec variation de volume positive.

Le domaine d'endurance est limité par la portion d'ellipse correspondant au plan de montée ABF (ou au plan ABE car la courbe obtenue est voisine). La courbe d'endurance obtenue a une allure analogue aux courbes expérimentales de fatigue en traction torsion alternée simultanée. Il est intéressant de la comparer à celles de la fig. II. 2. qui traduisent les critères empiriques proposés par certains auteurs pour ces modes de sollicitations.

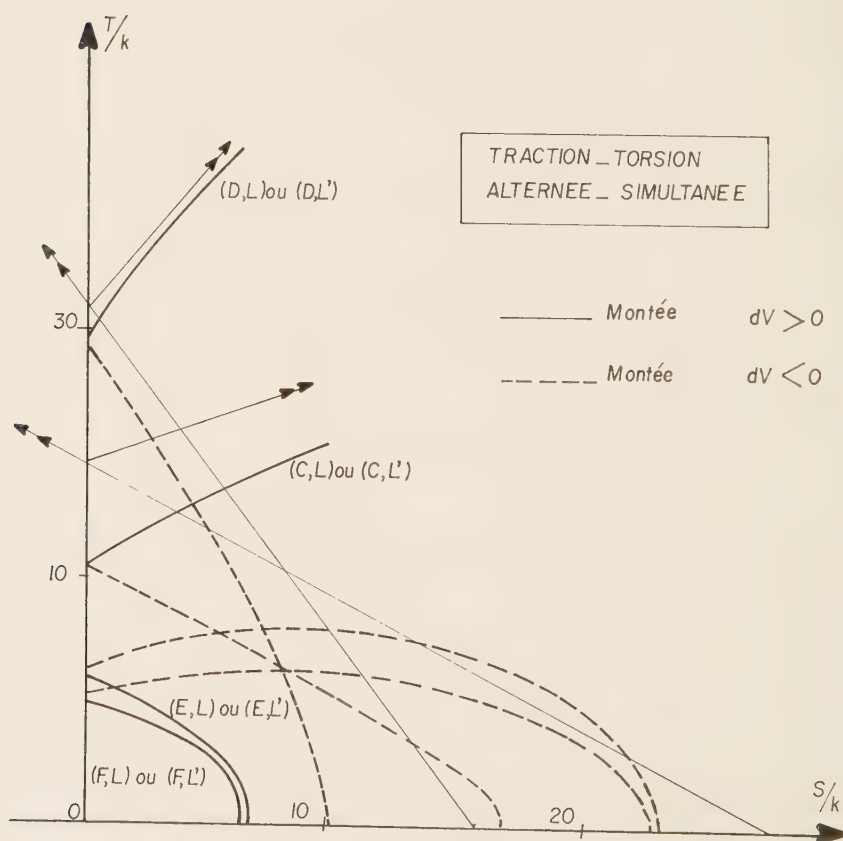
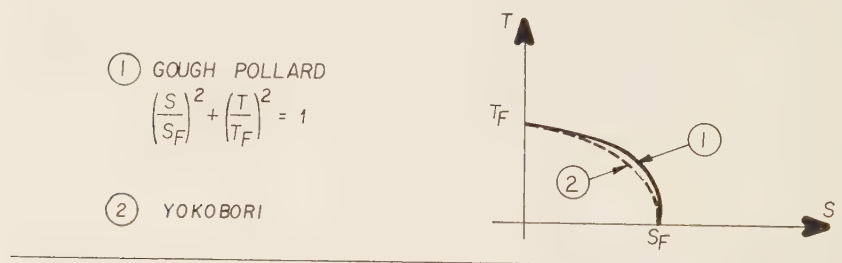


FIG. I.17

e. *Cas du tube fermé soumis à des pressions internes répétées*

Les composantes de $\vec{m} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ sont $\left(\varepsilon \frac{\sqrt{2}}{2}, \varepsilon \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$. La ligne de dislocation L (ou L') est dans le plan G (fig. I.6) parallèle à l'axe du tube et faisant avec OX_1 un angle de $\frac{\pi}{4}$.

Les conditions de montée avec formation de lacunes s'écrivent :

$$(I.29) \quad \left\{ \begin{array}{l} |T \varepsilon \cos \beta - p \sin \beta \sin \gamma| > K(\beta) \\ \text{signe } dV = \text{signe } \{-\sin \beta (T \varepsilon \cos \beta - p \sin \beta \sin \gamma)\} > 0 \end{array} \right.$$

Sur la figure I. 18, nous représentons dans les coordonnées (T, p) les courbes obtenues pour les plans de montée précédents ⁽¹⁾.

Le domaine d'endurance est le plus petit domaine défini par les segments de droites enveloppes correspondants aux variations de volume positives.

Remarquons que dans le cas de tubes fermés pulsés, la pression hydrostatique est toujours positive et par conséquent le domaine d'endurance doit être limité par $p = 0$. Toutefois nous avons vu que l'état de contrainte qui en résulte est équivalent à la superposition d'un cisaillement pur et d'une tension hydrostatique; on peut considérer la partie $p < 0$ du domaine d'endurance car elle correspond au cas de la torsion d'un cylindre plongé dans un liquide à haute pression.

Sur la figure I.18, nous avons représenté également le cisaillement local τ ($\tau = T$) dans les grains les plus défavorablement orientés en fonction de la pression hydrostatique pendant le cycle de charge pour les cas des tubes pulsés et de la torsion sous pression hydrostatique. Dans le premier cas, l'endommagement ne se produit d'après le modèle, qu'une seule fois pendant le cycle de charge tandis que dans le deuxième cas, il se produit deux fois.

Nous pouvons remarquer une influence très importante de la pression hydrostatique sur l'amplitude du cisaillement admissible. Les séries d'expériences de tubes pulsés de MORRISON, CROSSLAND et PARRY [8] confirment qualitativement ce résultat du modèle. La présence d'une tension hydrostatique diminue considérablement l'amplitude de la cisssion admissible. Les expériences ont été effectuées sur divers métaux : (différents aciers, alliage d'aluminium, etc.). Les difficultés expérimentales sont très grandes et des résultats quantitatifs ne sont donnés que pour les aciers « Vibrac ». La chute importante de l'amplitude du cisaillement avec la présence d'une tension hydrostatique est cependant un phénomène général pour les autres métaux étudiés.

⁽¹⁾ Rappelons que T demi-amplitude du cisaillement macroscopique est égale d'après le modèle à la contrainte de cisaillement local. p est la pression hydrostatique maximale qui est concomitant avec T .

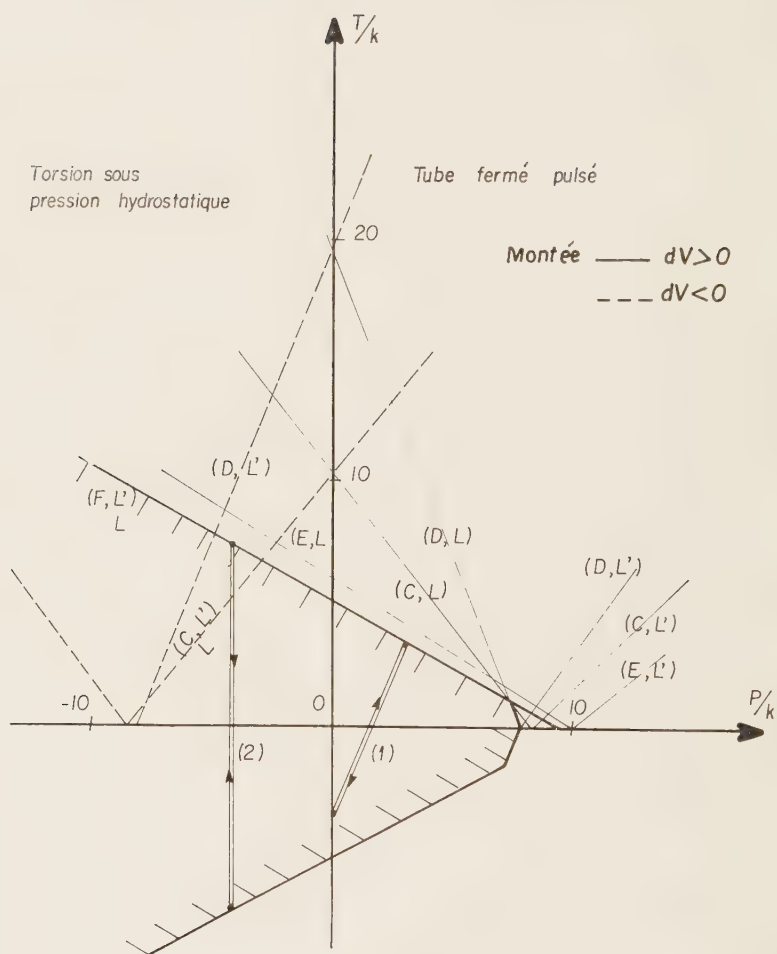


FIG. I.18

(1) Trajet de charge pour les grains les plus défavorablement orientés dans le cas du tube pulsé.

(2) Trajet de charge pour les grains les plus défavorablement orientés dans le cas de la torsion sous pression hydrostatique.

CHAPITRE II

CRITÈRES DE FATIGUE
ET JUSTIFICATIONS EXPÉRIMENTALES

Dans le premier chapitre, nous avons calculé à partir du modèle proposé les limites d'endurance pour quelques trajets de charge et retrouvé de façon qualitative les principaux résultats expérimentaux connus. Selon le modèle proposé, pour évaluer l'écroutissage il faut considérer les plans physiques qui subissent des cisaillements d'amplitude maximale. Il faut ensuite examiner les conditions de montée par rapport à ces plans et vérifier que, si la montée a lieu, la variation de volume correspondante est positive (formules I. 22). Lorsque les sollicitations cycliques sont complexes, le calcul n'est pas immédiat. Nous avons vu toutefois que pour les cas étudiés dans le premier chapitre un critère pratique (critère $[\tau, p]$) peut être dégagé : on porte le cisaillement τ agissant sur le plan de glissement des grains les plus défavorablement orientés en fonction de la pression hydrostatique p à chaque instant du cycle de charge; le domaine d'endurance peut être limité approximativement par une droite dans le plan (τ, p) , lorsque les contraintes appliquées n'entraînent pas des déformations plastiques macroscopiques notables.

Dans le premier paragraphe du présent chapitre, nous étudions les critères de fatigue proposés jusqu'à présent pour tenir compte des cycles de sollicitations en contraintes complexes, dans le but de les comparer au critère pratique (τ, p) qui résulte de notre étude.

Selon le modèle proposé, les principaux paramètres de contraintes qui interviennent sont l'amplitude du cisaillement et la pression hydrostatique. Dans le deuxième paragraphe nous citons les résultats d'un grand nombre d'expériences de fatigue classiques sur différents métaux. Les sollicitations imposées correspondent à différentes combinaisons de contraintes statiques et alternées. La transposition des résultats sur le diagramme (τ, p) et l'interprétation des résultats obtenus permet de donner une justification supplémentaire au modèle.

Le calcul des limites d'endurance pour un trajet de charge donné, nécessite la connaissance du tenseur de contraintes local en régime établi dans les grains défavorablement orientés. Pour l'évaluer, nous avons supposé que l'écroutissage du monocristal est isotrope. Les résultats expérimentaux qui justifient cette hypothèse sont rappelés dans le troisième paragraphe.

II.1. ANALYSE DES CRITÈRES EXISTANTS.

II.1.1. Critère du type de NAKANISHI-YOKOBORI-STANFIELD.

A partir des résultats expérimentaux, NAKANISHI [29] propose le critère suivant :

$$\Sigma_{\Phi} = \Sigma_B - \frac{1}{m} |T_{\Phi}|$$

où Σ_B est la contrainte de rupture statique du matériau,

Σ_{Φ} est la contrainte normale agissant sur le plan de rupture qui fait l'angle Φ avec un plan fixe donné, T_{Φ} est la contrainte de cisaillement alternée sur le plan (Φ),

m une constante caractéristique du matériau.

YOKOBORI (46) adopte un critère analogue qu'il utilise pour sa théorie.

Ces critères ressemblent au critère de STANFIELD [40] les fissures de fatigue s'amorcent sur un plan de normale $\hat{n}$ si sur ce plan la relation suivante est vérifiée :

$$(II.1) \quad T_n + c \Sigma_n \geq k$$

c et k sont deux constantes qu'on doit déterminer par l'expérience.

Utilisons les contraintes principales, en supposant que $|\Sigma_1| > |\Sigma_2| > |\Sigma_3|$ nous pouvons exprimer ce critère sous la forme ⁽¹⁾ :

$$(II.2) \quad \max \left\{ \begin{aligned} &\Sigma_1 (c - \sqrt{1+c^2}) + \Sigma_3 (c + \sqrt{1+c^2}) - 2k, \\ &\Sigma_1 (c - \sqrt{1+c^2}) + \Sigma_2 (c + \sqrt{1+c^2}) - 2k \end{aligned} \right\} > 0$$

Pour un état de contrainte plane ($\Sigma_3 = 0$), la relation (II.2) correspond pour des sollicitations alternées à la courbe de la figure II.1. Pour les expé-

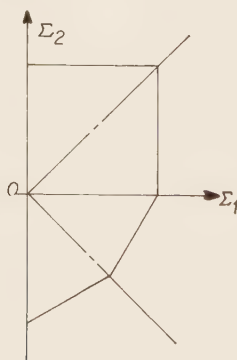


FIG. II.1

⁽¹⁾ On peut trouver ceci en écrivant que le plus grand cercle principal est tangent à la droite exprimée par la condition (II.1) et en considérant tous les cas possibles.

riences en traction torsion alternées simultanées on a l'habitude de reporter les résultats dans les coordonnées S (amplitude de la composante de traction), T (amplitude de la composante de torsion). Le critère s'écrit dans ces axes :

$$(II.3) \quad \frac{S^2}{4} + Sck + (1 + c^2) T^2 - k^2 = 0$$

qui est l'équation d'une ellipse dont le centre se trouve sur l'axe des tractions S (fig. II.2.). On peut comparer cette courbe de la figure II.2 avec celle de la figure I.17 obtenue à partir du modèle proposé.

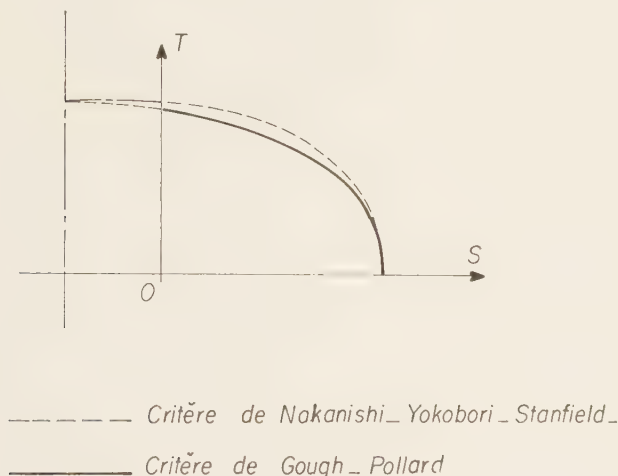


FIG. II.2

II.1.2. Critère de GOUGH-POLLARD [16].

Le critère de Gough-Pollard a été proposé pour rendre compte des résultats de traction torsion (ou flexion torsion) alternées, simultanées. La courbe représentative du critère est une ellipse dont le centre se trouve à l'origine. Son équation est :

$$(II.4) \quad \left(\frac{S}{S_F}\right)^2 + \left(\frac{T}{T_F}\right)^2 = 1$$

Il est facile de montrer (en utilisant la construction de Mohr) que cette condition s'écrit en fonction des contraintes principales :

$$(II.5) \quad \Sigma_1^2 + \Sigma_2^2 + \left(2 - \left(\frac{S_F}{T_F}\right)^2\right) \Sigma_1 \Sigma_2 = S_F^2$$

qui est l'équation d'une ellipse centrée à l'origine ayant son grand axe confondu avec la première bissectrice (fig. II.3). Cette ellipse ressemble à l'ellipse de

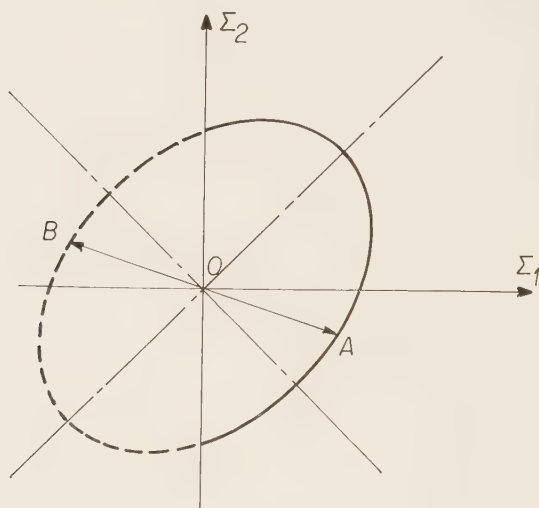


FIG. II.3

Mises; c'est pourquoi certains auteurs appellent le critère de Gough-Pollard critère de Mises en fatigue; ceci peut entraîner des confusions importantes comme nous l'avons signalé dans l'introduction. Alors que le critère de Mises permet de décrire l'état des contraintes sur la frontière d'écoulement, quelque soit le trajet de charge, le critère de Gough-Pollard, ainsi ceux précédemment cités ne s'appliquent que pour des modes de sollicitations particuliers. Notamment les critères de Nakanishi, Yokobori, Stanfield attribuent un rôle important à la contrainte normale agissant sur le plan de rupture. En fait les expériences de Crossland que nous étudierons plus loin montrent que c'est la contrainte hydrostatique qui est le facteur à considérer.

C'est pourquoi appeler les relations précédentes critères de fatigue en contraintes complexes sans préciser les trajets de charge pour lesquelles elles sont valables, peut conduire à des erreurs importantes dans la pratique.

II.1.3. Critère de SINES [39].

Sines remarque les faits suivants :

- les limites d'endurance en torsion dépendent de l'amplitude de la torsion et d'une traction statique et sont indépendants de la torsion moyenne;
- les limites d'endurance en traction sont fonction de la traction moyenne et une torsion statique n'a que peu d'effet sur celles-ci.

A partir de ces observations Sines propose pour des cycles de contraintes complexes le critère suivant :

$$(II.6) \quad \frac{1}{3} \sqrt{(p_1 - p_2)^2 + (p_2 - p_3)^2 + (p_3 - p_1)^2} = A + \alpha (S_x + S_y + S_z)$$

où p_i sont les amplitudes de la variation des contraintes principales et

$$\frac{S_y + S_y + S_z}{3}$$

représente la pression hydrostatique moyenne. A et α sont deux constantes déterminées par deux expériences :

Pour une expérience de traction alternée, le critère se réduit à :

$$\frac{\sqrt{2}}{3} p_1 = A$$

Pour une expérience de traction répétée, il s'écrit :

$$\frac{\sqrt{2}}{3} p'_1 = A - \alpha p'_1$$

Dans les axes (p_1, p_2, p_3) l'équation II.6 est celle d'une famille de cylindres concentriques (fig. II.4).

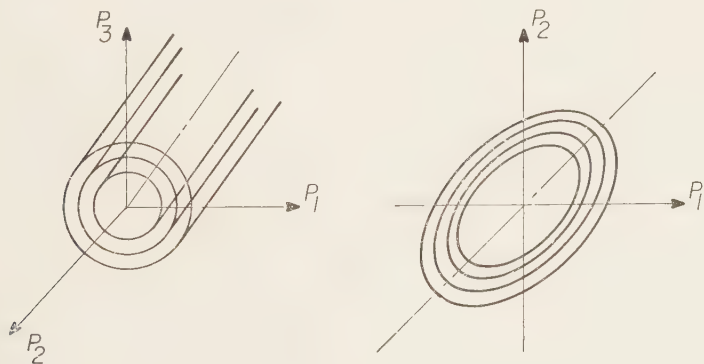


FIG. II.4

Pour des trajets de charge radiaux alternés, le premier membre de (II.6) caractérise en quelque sorte l'amplitude du cisaillement octaédral. Dans le cas général, l'appréciation de la validité du critère est difficile car l'interprétation du premier membre de l'équation n'est pas évidente. On peut en effet se demander quelle peut être la signification de celui-ci pour le trajet de charge étudié, les directions principales du tenseur des contraintes ne sont pas fixes pendant le cycle, ou bien si les contraintes principales ne sont pas extrémales simultanément.

Dans la pratique, le critère de Sines ne s'applique aisément que pour des cycles de sollicitation dépendant d'un seul paramètre (traction, flexion, torsion) ou des trajets de charge radiaux.

Cependant ce critère est intéressant car il tient compte, dans une certaine mesure, de l'influence de la contrainte hydrostatique. La description de celle-ci, par sa valeur moyenne, manque toutefois de précision.

II.1.4. Critère de CROSSLAND [7].

Le critère proposé a une forme analogue au critère de Sines.

L'endommagement est relié à une sorte d'amplitude de la cission octaédrale, mais à la différence du critère de Sines il se produit lorsque la tension hydrostatique est maximale. De plus, Crossland remarque à partir de ses propres essais, qu'il existe une certaine corrélation entre ces deux quantités. Trois genres d'expériences ont été effectuées : traction alternée, traction ondulée autour d'une valeur moyenne, torsion alternée d'éprouvettes cylindriques plongées dans un bain d'huile porté à une pression très élevée. Les résultats sont reproduits dans le tableau III.

Le critère proposé s'écrit :

$$(II.7) \quad \frac{1}{3} \sqrt{(p_1 - p_2)^2 + (p_2 - p_3)^2 + (p_3 - p_1)^2} = A + \frac{\alpha (S'_x + S'_y + S'_z)}{3}$$

ou $\frac{S'_x + S'_y + S'_z}{3}$ est la tension hydrostatique maximale pendant le cycle.

Le critère de Crossland appliqué aux expériences précédentes peut se comprendre à partir du modèle que nous proposons.

En effet l'érouissage et l'état des contraintes locales dans le grain (par rapport à l'état des contraintes macroscopiques) dépendent de l'amplitude de la cission. Nous avons vu que la montée avec formation de lacunes qui fait intervenir aussi bien le cisaillement que la pression hydrostatique se produit pour les expériences considérées et selon le trajet de contraintes envisagé pendant la charge ou la décharge lorsque la pression hydrostatique est maximale

TABLEAU III

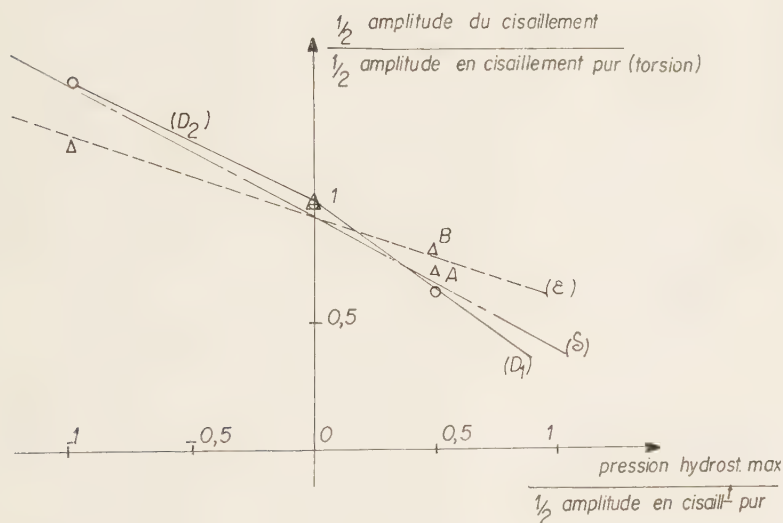
Type de l'essai	Intervalle de variation des contraintes (tonnes/inch ²)	Cission octaédrale (tonnes/inch ²)	Tension statique maximale (tonnes/inch ²)
Traction alternée.....	± 27	± 15,6	+ 9
Torsion.....	± 19,4	± 19,4	0
Torsion avec une pression hydrostatique de 20 t/inch ² .	± 25,4	± 25,4	- 20

Nous pouvons essayer de comparer les résultats expérimentaux de Crossland (résumés dans le tableau III) avec les résultats obtenus à partir du modèle proposé en soulignant toutefois que les expériences de Crossland se rapportent à un métal cubique centré alors que les exemples numériques traités concernent les métaux cubiques à faces centrées. Cependant les phénomènes sont analogues lorsque les métaux considérés sont suffisamment ductiles.

Pour cela, nous avons reporté la demi-amplitude de la cisssion en fonction de la pression hydrostatique maximale en prenant pour unité la demi-amplitude en cisaillement pur.

Nous avons comparé la torsion d'un cylindre plein soumis à une pression hydrostatique avec les résultats prévus par l'équation I.29.

Nous constatons sur la figure II.5 que les résultats déduits des équations (I.26), (I.27), (I.29) sont approximativement alignés (droite δ), comme le



- Δ Crossland (A cisssion, B cisssion octaédrale)
 $\circ$ Points calculés à partir du modèle proposé

FIG. II.5

sont les résultats déduits des expériences de Crossland (droite ε). Notons toutefois que δ est distincte des droites (D_1) et (D_2) correspondant respectivement à des expériences de traction ondulée et de tubes fermés pulsés de différents diamètres. La droite δ correspond en quelque sorte à une « droite moyenne » entre les droites (D_1) et (D_2).

Ainsi l'interprétation des expériences à partir du modèle proposé nous permet de comprendre la signification du critère. Pour ces expériences le rôle de la tension hydrostatique y est mieux décrit que dans le critère de

Sines. Toutefois dans des cas plus généraux on se heurte aux mêmes difficultés et aux mêmes incertitudes que pour le critère de Sines dues à l'impossibilité d'interpréter le premier membre de l'équation (II.7).

II.2. JUXTAPOSITIONS DE QUELQUES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX CONCERNANT DIFFÉRENTS MÉTAUX ⁽¹⁾.

Selon le modèle proposé, les deux paramètres de contrainte les plus importants à considérer dans l'étude de la fatigue sont l'amplitude du cisaillement et la tension hydrostatique. Du premier seul dépend l'écroutissage des grains les plus défavorablement orientés (on se limite aux niveaux des contraintes pas trop élevées de façon que les déformations plastiques macroscopiques puissent être négligées). La montée avec formation de lacunes fait intervenir de façon complexe les contraintes locales dans les grains. La variation de volume produite doit être positive et il en résulte que la montée est favorisée si la contrainte hydrostatique est une tension et contrariée dans le cas d'une compression. Le critère pratique (T, p) proposé n'est qu'approché. Nous verrons ici que pour les expériences courantes, l'approximation est valable.

Si le cycle de charge est tel que la contrainte hydrostatique est nulle à tout moment (cas de la torsion ondulée), la limite d'endurance dépend de l'amplitude du cisaillement macroscopique et non pas du cisaillement maximal (cf. équation I.27). Ceci est confirmé par les résultats d'essai sur différents métaux rapportés sur la figure II.6.

Dans le cas d'une traction ondulée, la demi-amplitude de la traction alternée est, d'après le modèle, une fonction linéaire décroissante de la traction moyenne (cf. § I.1.3). Sur la figure II.7, nous avons reporté un grand nombre de résultats d'essais sur divers métaux; nous avons également tracé l'allure de la droite théorique (droite ABF de la figure I.15). Nous pouvons remarquer que la pente de celle-ci est plus forte que celle des droites expérimentales.

La figure II.8 correspond à des essais de flexion alternée concomitante avec une torsion statique. On voit que l'amplitude de la flexion admissible n'est pas influencée par la torsion statique qui n'introduit aucune contrainte hydrostatique supplémentaire.

Par contre une tension statique diminue l'amplitude de la torsion alternée admissible (fig. II.9).

Sur la figure II.10, nous portons la demi-amplitude du cisaillement T en fonction de la pression hydrostatique p concomitante avec le maximum de T . Les points correspondent aux résultats expérimentaux des figures II.7 et II.9. Nous voyons que les pentes des droites déduites des figures II.7 et II.9 sont analogues, les droites les plus proches de l'origine se rapportent aux aluminiums, les autres aux aciers.

⁽¹⁾ Les résultats expérimentaux proviennent de différents auteurs, ils ont été résumés dans un article de SINES [39], d'où sont extraites les figures (II.6, II.7, II.8, II.9).

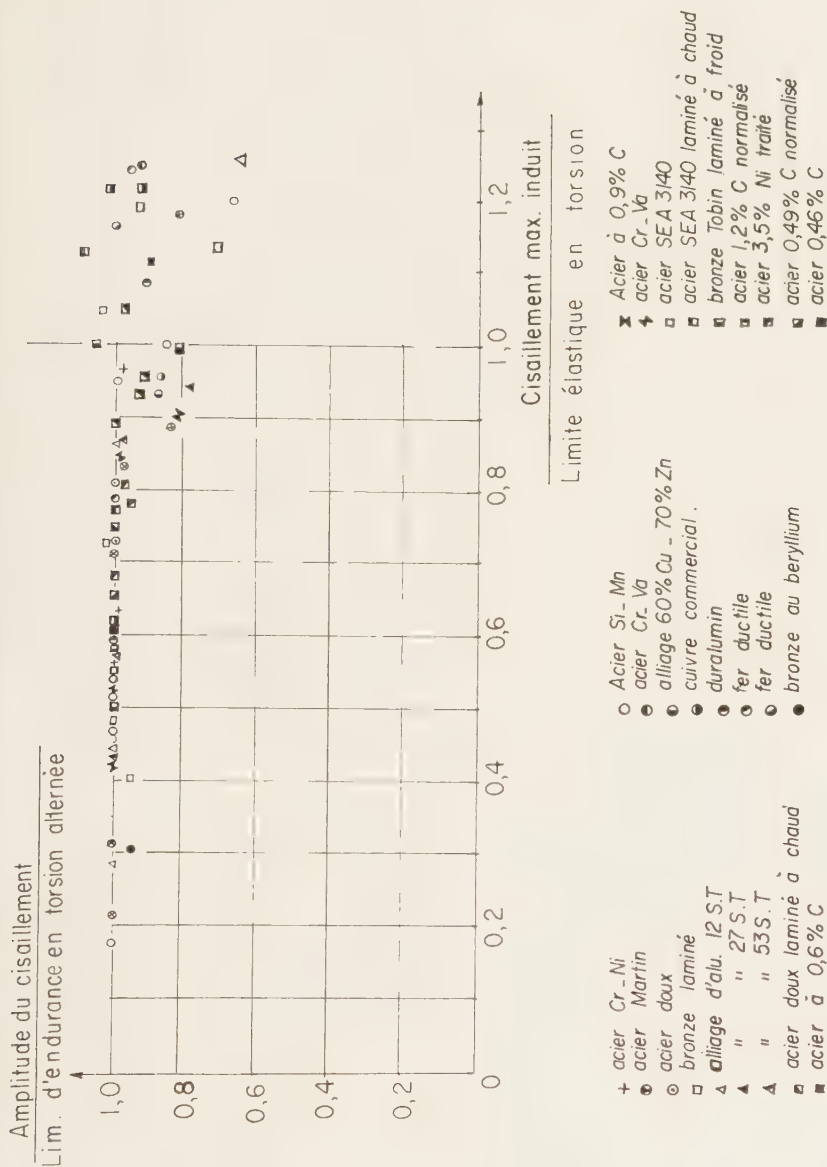


FIG. II.6

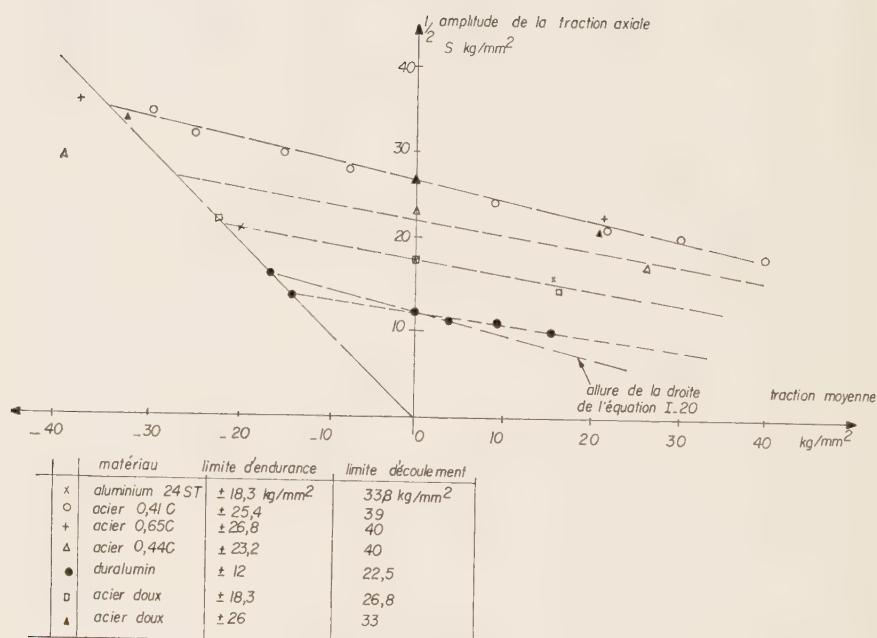


FIG. II.7

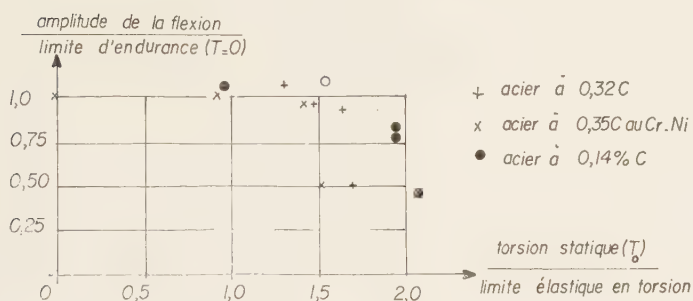
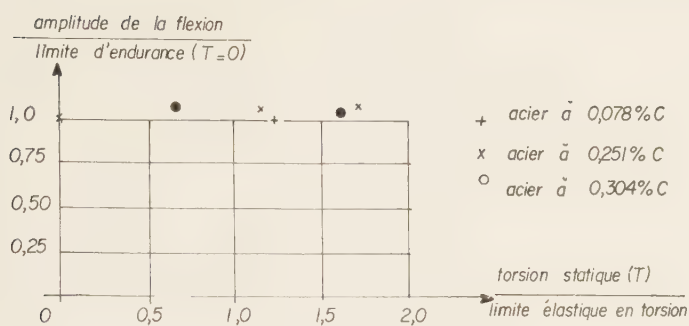


FIG. II.8

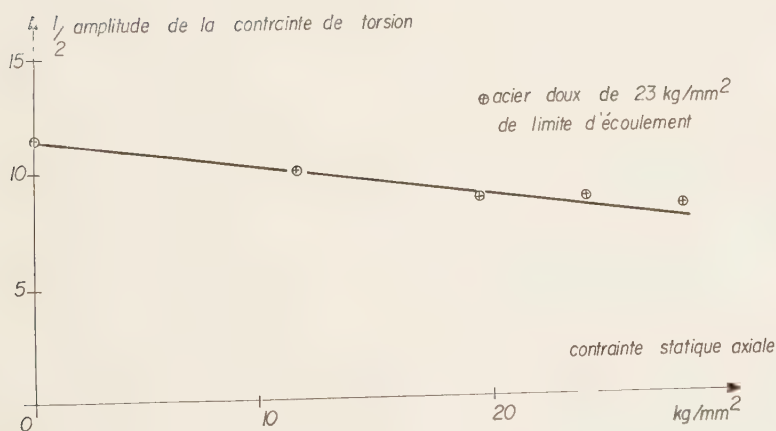
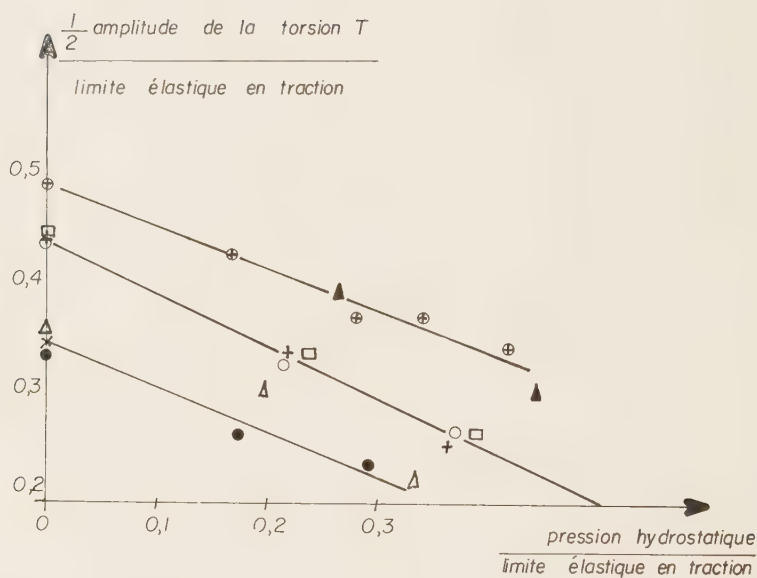


FIG. II.9



⊕ Torsion alternée avec traction statique axiale
 ⊕ Acier doux — limite d'écoulement 23 kg/mm²

TRACTION ONDULEE

	matériau	limite d'endurance	limite d'écoulement
x	Aluminium 24 ST	± 18 Kg/mm ²	33,8 Kg/mm ²
o	Acier 0,41 C	± 25,4 "	39 "
+	Acier 0,65 C	± 26,8 "	40 "
Δ	Acier 0,44 C	± 23,2 "	40 "
●	Duralumin	± 12 "	22,5 "
□	Acier doux	± 18,3 "	26,8 "
▲	Acier doux	± 26 "	33 "

FIG. II.10

II.3. JUSTIFICATION EXPÉRIMENTALE DES HYPOTHÈSES SUR LA LOI D'ÉCROUIS-SAGE DU MONOCRISTAL.

Pour évaluer l'état des contraintes en régime établi dans les grains les plus défavorablement orientés, nous avons supposé que l'écroutissage du grain est isotrope.

Nous allons rappeler les résultats expérimentaux de ZARKA [47] et FELTNER [12] qui permettent de justifier cette hypothèse.

Zarka a effectué des essais de traction compression sur un monocristal d'aluminium avec des vitesses de déformation imposées très faibles ($\dot{\epsilon} = 2.10^{-5}/s$) En comparant les courbes de la figure II.11 avec celle de la figure II.12 de

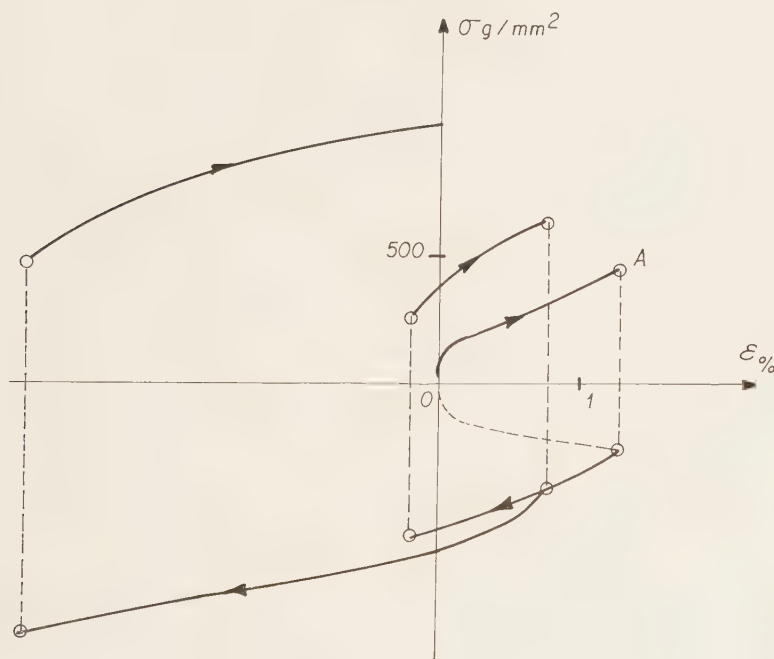


FIG. II.11

BUI [2] sur l'aluminium polycristallin, on voit que si l'effet Bauschinger ne peut être négligé pour les polycristaux, il est moins sensible sur les monocristaux. On remarque également sur la figure II.11 que pour la partie OA du trajet de charge les limites élastiques (en traction et en compression) augmentent en fonction de l'écroutissage. D'une façon générale, on constate une augmentation du domaine élastique (effet d'expansion).

Des expériences plus significatives quand il s'agit de la fatigue en traction compression ont été réalisées par FELTNER [12] sur des monocristaux de

o aluminium recuit à 300°C

Δ aluminium recuit à 250°C

E_o, S_o : limites élastiques initiales

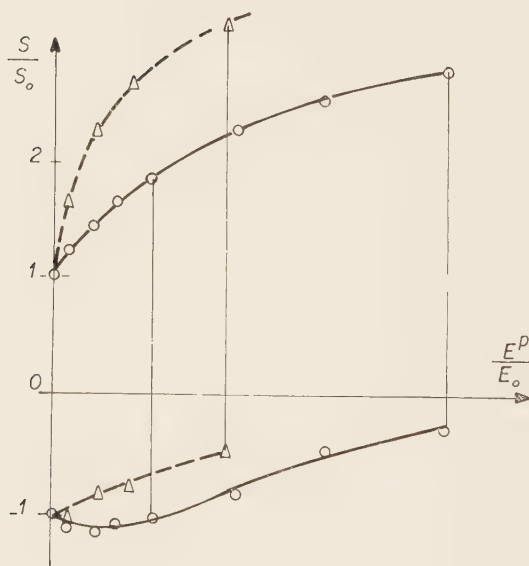


FIG. II.12

cuivre. On s'impose des cycles de charge entraînant des déformations plastiques qui oscillent entre deux valeurs $+\gamma^p$ et $-\gamma^p$. La figure II.13 montre les boucles typiques obtenues lors des dix premiers cycles sur un monocristal de cuivre à 200°K . L'amplitude des déformations plastiques γ^p est égale à $\pm 2\%$ ce qui est très important (les déformations plastiques en fatigue sont beaucoup plus faibles). On peut ainsi observer l'écrouissage progressif au cours des premiers cycles : d'abord rapide, celui-ci devient ensuite plus lent. En général, si les déformations imposées ne sont pas trop importantes, les boucles se stabilisent et on obtient un régime établi. On peut constater sur la figure que l'écrouissage est approximativement isotrope. A partir de ces résultats, on peut construire la courbe d'écrouissage dû à des chargements cycliques en portant les limites d'écoulement en fonction des déformations plastiques cumulées ($\sum |\gamma^p|$). Sur la figure II.14 sont représentées trois courbes expérimentales correspondant à des expériences réalisées respectivement à 78°K ,

200° K, et 295° K avec des déformations plastiques imposées de 0,8 %. On distingue trois zones : une zone d'érouissage rapide, une zone de transition, et une zone de saturation correspondant à un régime établi.

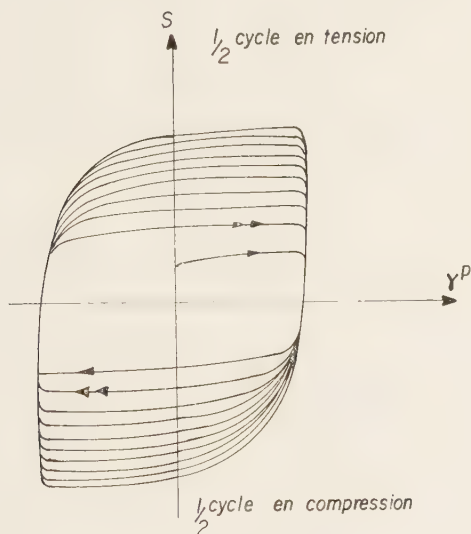


FIG. II.13

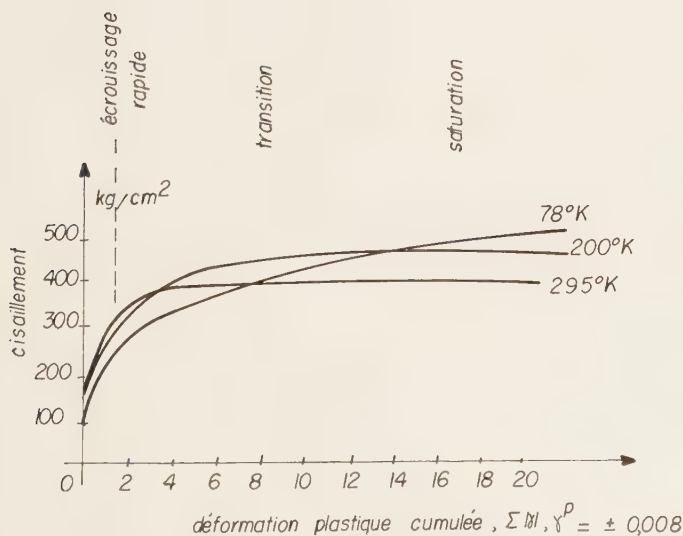


FIG. II.14

CHAPITRE III

CONCENTRATION DES CONTRAINTES ET PROPAGATION DES FISSURES

III.1. REMARQUES PRÉLIMINAIRES.

Le modèle présenté dans le premier chapitre s'applique à des échantillons bien cristallisés dans lesquels il n'y a pas de défauts macroscopiques du genre macrofissures, entailles ou inclusions. C'est en général le cas des éprouvettes essayées en laboratoire pour déterminer les qualités mécaniques des métaux. Dans les cas pratiques rencontrés dans l'industrie il arrive que les défauts existent malgré tous les soins apportés à la fabrication de la pièce. Ces défauts servent d'amorces aux fissures en provoquant la concentration des contraintes en leur voisinage. Ils sont souvent la cause de ruptures fragiles inattendues et dans le cas de la fatigue, ils abaissent considérablement les limites d'endurance.

D'autre part, dans les pièces soumises à des sollicitations cycliques, les fissures qui se forment au début par pure fatigue (période 1, période 2 et période 3), se propagent (période 4) d'abord lentement puis en accélérant; lorsque les fissures atteignent une taille suffisante la rupture se produit selon un mode fragile. Dans beaucoup d'exemples, notamment lors des essais à basse température ou lors des essais sur des matériaux peu ductiles, la rupture survient brutalement peu après la formation des premières fissures de fatigue.

Quand il s'agit de rupture sous chargement cyclique, l'étude des concentrations de contraintes est intéressante à deux points de vue :

1° Essayer de prévoir la diminution de la limite d'endurance due à la présence de défauts.

2° Analyser la propagation des fissures de fatigue pendant la période 4.

Pour étudier les ruptures des pièces munies d'entailles, de congés ou de trous, on définit généralement dans les ouvrages pratiques un coefficient de concentration statique de la manière suivante :

$$K_s = \frac{\Sigma_m}{\Sigma_n}$$

Σ_m étant « la contrainte maximale » dans la section présentant des défauts, calculée par la théorie de l'élasticité; Σ_n est la contrainte nominale de l'échan-

tillon sans défaut. La nature de la contrainte à laquelle on s'intéresse dépend de l'expérience envisagée. Par exemple Σ_m , Σ_n sont des tractions dans des expériences de traction et de flexion et des cisaillements dans les expériences de torsion.

Le coefficient K_s ainsi défini n'a cependant pas une signification physique claire pour deux raisons :

- d'une part l'effet d'un défaut ne revient généralement pas à multiplier toutes les contraintes par un même coefficient;
- d'autre part, on choisit implicitement un critère de rupture qui ne coïncide pas forcément avec la réalité physique.

Pour pallier à ces inconvénients, on définit deux autres coefficients :

— le coefficient d'entaille en fatigue K_f qui est le rapport de la contrainte de rupture en fatigue de l'éprouvette lisse et de la contrainte nominale de rupture en fatigue de l'éprouvette entaillée;

— le coefficient de sensibilité à l'entaille $q = \frac{K_f - 1}{K_s - 1}$.

Il est clair, toutefois, que les coefficients ainsi définis, ne permettent pas de calculer les concentrations des contraintes dans les pièces munies de congé, d'entaille ou d'inclusion à partir des données expérimentales obtenues sur une éprouvette d'un type donné pour un trajet de charge déterminé.

Dans ce qui suit, nous nous intéressons aux méthodes proposées pour calculer les concentrations de contraintes lorsque le chargement est monotone en signalant toutefois que faute de pouvoir faire mieux, on admet qu'elles peuvent également s'appliquer aux ruptures par fatigue. Pour simplifier, supposons le matériau élastique. Le problème serait alors le suivant :

— si $\Sigma_{ij}(x)$ est l'état de contrainte d'un échantillon sans défaut et $S_{ij}(x)$ le tenseur de contrainte en un point x voisin du défaut, la présence de celui-ci peut être caractérisée par le tenseur $L_{ij}^{hk}(x)$ défini par :

$$S_{ij}(x) = L_{ij}^{hk} \Sigma_{hk}(x)$$

— si $f(\Sigma_{ij}) - \text{cste} = 0$ est le critère d'endommagement du matériau sans hétérogénéité, un échantillon muni de défauts se rompra si :

$$f(L_{ij}^{hk} \Sigma_{hk}) - \text{cste} \equiv F(\Sigma_{ij}) - \text{cste} = 0$$

en un point x donné;

on a :

$$F(\Sigma_{ij}(x)) \neq K f(\Sigma_{ij}(x))$$

en général.

$L_{ij}^{hk}(x)$ dépend de la nature, de la forme, des dimensions du défaut et de l'échantillon, de la position du défaut dans l'échantillon, de la position du point x par rapport au bord du défaut.

Même en supposant que le matériau a un comportement élastique, le problème est complexe et $L_{ij}^{hk}(x)$ ne se réduit pas à un seul coefficient (ou à un petit nombre de coefficients). Toutefois, avec des hypothèses restrictives particulières, on peut caractériser les concentrations de contraintes avec un petit nombre de facteurs.

Par exemple :

- i. S'il s'agit d'une fissure, on peut postuler que le raccordement des lèvres à l'état initial est anguleux;
- ii. S'il s'agit d'une inclusion, on peut faire l'hypothèse qu'elle est mince et rigide.

Dans ces conditions on peut démontrer que les contraintes au voisinage de la fissure ou de l'inclusion obtenue par le calcul sont singulières en $r^{-1/2}$, r étant la distance du point considéré à l'extrémité de la fissure ou de l'inclusion. On convient alors de caractériser les contraintes par les coefficients des termes singuliers principaux K qu'on appelle facteurs d'intensité de contrainte (voir par exemple réf. 33). Pour des chargements homogènes, on démontre que ceux-ci ne sont fonctions que des contraintes imposées (contraintes homogènes à l'infini), de la forme et des dimensions géométriques du défaut et de l'échantillon. Les contraintes provoquant la rupture correspondent à des facteurs d'intensité de contrainte critique K_c . Cette méthode généralement admise aujourd'hui dans la pratique, ne s'applique cependant qu'à l'étude de la propagation de la fissure déjà formée et non à la nucléation des fissures ⁽¹⁾.

Dans les paragraphes II.2.1. et III.2.2., nous présentons deux méthodes nouvelles d'évaluation des concentrations des contraintes applicables à la nucléation des fissures. La première est une méthode générale de calcul élastique des déformations et des contraintes au voisinage d'une inclusion de forme quelconque, inspirée d'une étude de BUI [2] sur les inclusions. La seconde concerne le calcul des contraintes et des déformations autour d'une fissure plane dans un milieu élastoplastique.

⁽¹⁾ La méthode des facteurs d'intensité de contrainte critique est en effet équivalente à celle résultant de la théorie de GRIFFITH [17]. Lorsqu'une fissure de longueur initiale $2a$ se propage et passe à $2(a + da)$, on a la relation suivante :

$$dU = 4 \gamma da,$$

où dU est la variation de l'énergie élastique du solide due à la propagation de la fissure et γ est l'énergie de surface spécifique du matériau.

Au voisinage de la fissure, la contrainte normale en avant de la fissure et le déplacement d'ouverture de la fissure sont respectivement de la forme :

$$\sigma = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}}, \quad v = \alpha K \sqrt{r}$$

et la variation d'énergie élastique est proportionnelle à K^2 .

Dans le cas d'une fissure soumise à une traction uniforme à l'infini perpendiculairement à son plan, on peut démontrer la relation suivante entre γ et le facteur d'intensité de contrainte critique en traction K_{IC} :

$$2 \gamma = \frac{1 - \nu^2}{E} K_{IC}^2$$

Bien que les études sur la concentration de contraintes dans les phénomènes de rupture soient très nombreuses ⁽¹⁾, le problème est encore loin d'avoir des solutions définitives.

Les études théoriques reposent sur des hypothèses restrictives qui prêtent à discussion. Les études expérimentales entreprises sont forcément limitées à des formes de défauts simples d'assez grandes dimensions. Les trajets de charge sont également simples. Ces diverses expériences ne permettent pas de conclure dans des cas généraux.

C'est pourquoi faute de mieux, on est encore souvent obligé pour des cas complexes de caractériser les concentrations de contraintes par un coefficient assez mal défini du point de vue physique.

Pour les mêmes raisons, l'application des résultats des calculs à l'étude théorique de la propagation des fissures de fatigue est prématurée. Toutefois une explication peut être donnée à partir d'autres considérations sur la direction de la macrofissure au début de la phase de propagation. Nous devons également signaler l'analogie qui existe du point de vue de la direction de propagation entre la macrofissure de fatigue et celle résultant de rupture fragile. Ces points font l'objet du paragraphe III.3.

III.2. NOUVELLES MÉTHODES DE CALCUL DES CONCENTRATIONS DE CONTRAINTES AU VOISINAGE DE DÉFAUTS.

III.2.1. *Calcul des concentrations de contraintes dues à une inclusion de forme quelconque.*

La méthode que nous exposons est inspirée par une étude de BUI [2] à partir d'un travail d'ESHELBY [11].

Considérons une inclusion C de forme régulière quelconque de frontière ∂C . L'inclusion (qui peut être anisotrope) est entourée d'une matrice élastique isotrope Ω de frontière extérieure $\partial\Omega$ et de normale ν . Λ^0_{ijhk} et Λ_{ijnk} sont respectivement les compliances élastiques de la matrice et de l'inclusion, Λ^0_{ijhk} est en général différent de Λ_{ijnk} . Puisque la matrice est isotrope :

$$\Lambda^0_{ijhk} = \lambda^0 \delta_{ij} \delta_{hk} + \mu^0 (\delta_{ih} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jh})$$

Nous supposons que les déformations et les contraintes sont continues entre la matrice et l'inclusion.

⁽¹⁾ Entre autres, on peut citer les ouvrages suivants traitant de la concentration de contraintes dans les milieux élastiques : H. NEUBER, *Kerbspannungslehre*, Springer, Berlin, 1937 et 1958; R. E. PETERSEN, *Stress Concentration Design Factors*, John Wiley and Sons Inc., New York, N. Y., 1953.

Les études concernant les fissures dans les milieux élastoplastiques sont déjà mentionnées dans l'introduction.

On peut montrer que le problème du solide élastique muni de l'inclusion C est équivalent au problème du solide élastique $(\Omega + C)$ supposé homogène de compliance élastique Λ^0_{ijkl} mais à l'intérieur duquel agissent des forces de volume f_i et de surface S_i données par :

$$\begin{aligned} f_i(x) &= (\Lambda - \Lambda^0)_{ijkl} \varepsilon_{hkl,j}(x) & x \in C & \text{ avec } \varepsilon_{hkl,j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \varepsilon_{hkl} \\ S_i(x) &= -(\Lambda - \Lambda^0)_{ijkl} \varepsilon_{hkl}(x) n_j(x) & x \in \partial C \end{aligned}$$

La virgule devant j indique la dérivation par rapport à x_j et n_j désigne la normale extérieure à ∂C .

Soit $N_i^h(x, y)$ le tenseur de Neumann du solide élastique $(\Omega + C)$. Le champ de déplacement u_i dont dérive $\varepsilon_{ij}(x)$ est donné par :

$$(III.1) \quad u_i(x) = U_i(x) + \int_C N_i^h(x, y) f_h(y) dv_y + \int_{\partial C} N_i^h(x, y) S_h(y) dS_y$$

où $U_j(x)$ est le déplacement au point x du solide homogène soumis à sa surface extérieure à des forces $F_i = \sum_{ij} v_j$.

On sait que la partie singulière $S_i^h(x, y)$ du tenseur de Neumann $N_i^h(x, y)$ est le tenseur de Kelvin Somigliana qui s'écrit :

$$S_i^h(x, y) = \frac{\delta_{ih}}{4\pi\mu_0|x-y|} - \frac{1}{8\pi\mu_0} \frac{(\lambda_0 + \mu_0)}{(\lambda_0 + 2\mu_0)} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_h} |x-y|$$

$S_i^h(x, y)$, donc $N_i^h(x, y)$ a des singularités en $|x-y|^{-1}$.

On peut dériver (III.1) sous le signe intégral par rapport à x_j et obtenir après symétrisation des indices i, j les déformations :

$$(III.2) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{ij}(x) &= E_{ij} + \int_C N_{(i,j)}^h(x, y) (\Lambda - \Lambda^0)_{hklm} \varepsilon_{lm,k}(y) dv_y \\ &\quad - \int_{\partial C} N_{(i,j)}^h(x, y) (\Lambda - \Lambda^0)_{hklm} \varepsilon_{lm}(y) n_k(y) dS_y \end{aligned}$$

Ces équations intégrodifférentielles peuvent se ramener à des équations intégrales par application du théorème de Stokes. Cette opération nécessite certaines précautions si $x \in C$ car la singularité de $N_{i,j}^h(x, y)$ étant en $|x-y|^{-2}$, les dérivés partielles de cette quantité par rapport à y_i ne sont pas sommables.

Notons par :

$$N_{(i,j)}^{h,k}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y_k} N_{(i,j)}^h(x, y)$$

et soit $B(x, \varepsilon)$ la sphère $|y-x| < \varepsilon$ centrée en x de rayon arbitrairement petit.

Si on oriente la normale de la sphère ν_k vers l'extérieur, le théorème de Stokes permet d'écrire II.2 sous la forme :

$$(III.3) \quad \varepsilon_{ij}(x) = E_{ij}(x) - \int_{C-B(x, \varepsilon)} N_{(i,j)}^{h,k}(\Lambda - \Lambda^0)_{hklm} \varepsilon_{lm}(y) dv_y \\ - \int_{\partial B(x, \varepsilon)} N_{(i,j)}^h(\Lambda - \Lambda^0)_{hklm} \varepsilon_{lm}(y) n_k(y) dS_y \\ + \int_{B(x, \varepsilon)} N_{(i,j)}^h(x, y) (\Lambda - \Lambda^0)_{hklm} \varepsilon_{lm,k}(y) dS_y \text{ pour } x \in C$$

Il est facile de calculer les limites des deux dernières intégrales quand $\varepsilon \rightarrow 0$ en supposant $\varepsilon_{hk}(x)$ continûment dérivable. Pour ce calcul, il suffit de prendre la partie singulière du tenseur de Neumann $S_i^h(x, y)$. On trouve :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B(x, \varepsilon)} S_{(i,j)}^h(x, y) (\Lambda - \Lambda^0)_{hklm} \varepsilon_{lm}(y) dv_y = 0$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B} S_{(i,j)}^h(x, y) (\Lambda - \Lambda^0)_{hklm} \varepsilon_{lm}(y) \nu_k(y) dv_y = \alpha_{ij}^{h,k} \varepsilon_{hk}(x), x \in C \quad \alpha_{ij}^{h,k} \neq 0$$

Par exemple quand l'inclusion est élastique isotrope :

$$\alpha_{ij}^{h,k} = \frac{(1-2\nu^0)(\lambda-\lambda^0)}{6\mu^0(1-\nu^0)} \delta_{ij} \delta_{hk} + \frac{\mu-\mu^0}{15\mu^0(1-\nu^0)} (8-10\nu^0) (\delta_{ih} \delta_{jk} - \delta_{ij} \delta_{hk})$$

La limite de la première intégrale de (III.3.) si elle existe est une intégrale singulière au sens des valeurs principales de Cauchy que nous notons par :

$$\lim_{\varepsilon > 0} \int_{C-B(x, \varepsilon)} N_{(i,j)}^{h,k}(x, y) (\Lambda - \Lambda^0)_{hklm} \varepsilon_{lm}(y) dv_y = \\ \int^* N_{(i,j)}^{h,k}(x, y) (\Lambda - \Lambda^0)_{hklm} \varepsilon_{lm}(y) dv_y$$

En résumé, les relations intégrodifférentielles (III.2) sont transformées en équations intégrales suivantes :

$$(III.4) \quad (\alpha_{ij}^{h,k} + \delta_{ih} \delta_{jk}) \varepsilon_{hk}(x) = E_{ij}(x) - \int^* N_{(i,j)}^{h,k}(x, y) (\Lambda - \Lambda^0)_{hklm} \varepsilon_{lm}(y) dv_y \\ \text{pour } x \in C$$

$$(III.5) \quad \varepsilon_{ij}(x) = E_{ij}(x) - \int N_{(i,j)}^{h,k}(x, y) (\Lambda - \Lambda^0)_{hklm} \varepsilon_{lm}(y) dv_y \text{ pour } x \in \Omega$$

Ainsi, dans le cas où les forces extérieures au solide sont données, on peut calculer les contraintes $\Sigma_{ij}(x)$ et les déformations $E_{ij}(x)$. L'équation III.4. permet de calculer les déformations $\varepsilon_{ij}(x)$ pour tout point de l'inclusion. L'équation III.5. permet d'obtenir les déformations $\varepsilon_{ij}(x)$ pour tout point du solide extérieur à l'inclusion. On peut en déduire facilement les contraintes $S_{ij}(x)$ au voisinage de l'inclusion.

REMARQUE. — Pour les inclusions sphériques ou ellipsoïdales, ESHELBY [11] a montré que les déformations $\varepsilon_{ij}(x)$ à l'intérieur de l'inclusion sont constantes. Pour ces cas, les équations intégrales deviennent des équations algébriques.

III.2.2. Calcul des contraintes autour d'une fissure dans un milieu élastoplastique.

La méthode de calcul est une adaptation avec certaines hypothèses simplificatrices de la méthode que nous avons étudiée avec BUI [3] pour les problèmes aux limites en vitesse de force dans un solide élastoplastique.

Soit V le solide élastoplastique de frontière dV , P la région en charge plastique et ∂P sa frontière.

On sait que la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}_{ij}(x)$ du solide élastoplastique peut être considérée comme la vitesse de déformation d'un solide purement élastique de même géométrie V et soumis aux mêmes conditions aux limites que le solide élastoplastique mais avec des forces fictives suivantes (cf. ESHELBY [11], LIN [23]) :

$$(III.6) \quad \begin{aligned} \dot{f}_i(x) &= -2\mu \dot{\varepsilon}_{ij,j}^p(x) & x \in P \\ \dot{S}_i(x) &= 2\mu \dot{\varepsilon}_{ij}^p(x) n_j(x) & x \in \partial P \end{aligned}$$

La virgule devant j indique la dérivation par rapport à x_j et n_j désigne la normale extérieure à ∂P .

Rappelons d'abord les équations à résoudre lorsque les données aux limites portent sur les vitesses de forces.

La relation qui lie les déformations totales ε_{ij} les déformations plastiques ε_{ij}^p et les déformations ε_{ij}^0 solutions du problème élastique quand la traction surfacique sur ∂V est F_i , est :

$$\varepsilon_{ij}(x) = \varepsilon_{ij}^0(x) - 2\mu \int_P N_{i,j}^h(x, y) \varepsilon_{h,h}^p(y) dv_y + 2\mu \int N_{i,j}^h(x, y) \varepsilon_{hk}^p(y) n_k(y) dS_y$$

où $N_i^h(x, y)$ est le tenseur d'influence de Neumann du solide V .

On peut ramener ces équations intégrodifférentielles à des équations intégrales singulières par application de la formule de Stokes. L'intégration par partie se fait de la même façon que pour l'équation III.2. du paragraphe précédent. On trouve en écrivant sous forme de vitesse de déformation :

$$(III.7) \quad \dot{\varepsilon}_{ij}(x) = \dot{\varepsilon}_{ij}^0(x) + 2\mu \int_P^* N_{(i,j)}^{(h,k)}(x, y) \dot{\varepsilon}_{hk}^p(y) dv_y + \beta \dot{\varepsilon}_{ij}^p(x) \quad x \in V$$

où $N_{(ij)}^{(hk)}(x, y)$ s'obtient à partir de $N_{(ij)}^h$, par dérivation par rapport à y_k et par symétrisation sur les indices h et k . Le signe $*$ indique que l'intégrale est prise au sens des valeurs principales de Cauchy.

$$\beta = \frac{8-10\nu}{15(1-\nu)}$$

est un terme supplémentaire dû à la partie singulière du tenseur de Neumann.

Considérons un matériau écrouissable qui obéit à la loi de PRANDTL-REUSS [25] :

$$\dot{\varepsilon}_{hk}^p(x) = g(\sigma(x)) s_{hk}(x) s_{lm}(x) \dot{\sigma}_{lm}(x)$$

Écrivant la vitesse de déformation totale sous la forme

$$\dot{\varepsilon}_{ij}(x) = \dot{\varepsilon}_{ij}^p(x) + M_{ij}^{hk} \dot{\sigma}_{hk}(x) \quad (1)$$

on obtient le système d'équations pour les vitesses des contraintes :

$$\left\{ (1 - \beta) g(\sigma) s_{ij}(x) s_{lm}(x) + M_{ij}^{lm} \right\} \dot{\sigma}_{lm}(x) - \int_P^* N_{(i,j)}^{(h,k)}(x, y) g(\sigma(y)) s_{hk}(y) s_{lm}(y) \dot{\sigma}_{lm}(y) dv_y - \dot{\varepsilon}_{ij}(x) = 0$$

Lorsque le matériau est élastique parfaitement plastique, obéissant au critère de Mises, $(s_{ij} s_{ij} = K^2)$, on a :

$$(III.8) \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^p(x) = s_{ij}(x) \dot{\lambda}(x) \quad x \in P \quad \dot{\lambda}(x)$$

scalaire non négatif;

$$(III.9) \quad \text{avec} \quad s_{ij}(x) \dot{s}_{ij}(x) \equiv s_{ij}(x) \dot{\sigma}_{ij}(x) = 0 \quad x \in P.$$

et on est amené à résoudre une seule équation singulière en $\dot{\lambda}$ à noyau symétrique :

$$(III.10) \quad (1 - \beta) k^2 \dot{\lambda}(x) - 2 \mu \int_P^* S_{ij}(x) N_{i,j}^{h,k} S_{hk}(y) \dot{\lambda}(y) dv_y - S_{ij}(x) \dot{\varepsilon}_{ij}^o(x) = 0 \quad x \in P$$

Lorsque les données aux limites sont autres (par exemple vitesses de déplacement imposées ou bien conditions aux limites mixtes) il faut connaître le tenseur d'influence correspondant.

Une méthode analogue est alors applicable.

Dans les problèmes tridimensionnels, le terme supplémentaire résultant de l'intégration par partie est $\beta \varepsilon_{ij}^p(x)$ car la partie singulière des tenseurs d'influence (dans R^3) qui donne le déplacement au point x sous l'action d'une force au point y est le tenseur de Kelvin Somigliana.

Nous étudions plus particulièrement le cas des problèmes en déformation plane, qui se prêtent mieux aux applications numériques.

$$(1) \quad M_{ij}^k = \frac{1+\nu}{E} (\delta^k \delta_j + \delta^j \delta_i) - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \delta^{hk}$$

Soit $G_{ij}^h(x, y)$ le tenseur d'influence qui donne les contraintes au point x sous l'action d'une distribution de force unité concentrée sur la ligne $y(y_1, y_2)$ orientée suivant x_h . Sa partie singulière est ⁽¹⁾ :

$$g_{ij}^h(x, y) = \frac{1}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y_i - x_i)(y_j - x_j)(y_h - x_h)}{|y - x|^4} + \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} \\ [(y_i - x_i)\delta_{jh} + (y_j - x_j)\delta_{ih} - (y_h - x_h)\delta_{ij}] \frac{1}{|y - x|^2} \quad i, j, h = 1, 2$$

Les équations intégrales singulières qui donnent les vitesses de contraintes s'écrivent après intégration par partie :

$$\dot{\sigma}_{ij}(x) = \dot{\sigma}_{ij}^0(x) + 2\mu \int_P^* G_{i,j}^{h,k}(x, y) \dot{\varepsilon}_{hk}^p(y) dS_y + \chi_{ij}^{hk} \dot{\varepsilon}_{hk}^p(x)$$

où :

$$\chi_{ij}^{hk} = 2\mu \left[\frac{1}{8(1-\nu)} \delta_{ij} \delta_{hk} + \frac{1-2\nu}{4(1-\nu)} (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{jk} \delta_{ih} - \delta_{hk} \delta_{ij}) \right]$$

Remarquons que :

$$s_{33} = -(s_{11} + s_{22})$$

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + E(\varepsilon_{11}^p + \varepsilon_{22}^p) = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + 2\mu(1+\nu)(\varepsilon_{11}^p + \varepsilon_{22}^p)$$

Dans le cas d'un matériau parfaitement plastique, en remplaçant ε_{ij}^p par $s_{ij}\dot{\lambda}$ et tenant compte de la relation (III.9) on obtient une équation intégrale singulière en $\dot{\lambda}$:

$$(III.11) \quad [\dot{\sigma}_{ij}^0 - \nu(\dot{\sigma}_{11}^0 + \dot{\sigma}_{22}^0)\delta_{ij}] s_{ij} - 2\mu \int_P^* s_{ij}(x) [G_{ij}^{hk} - \nu(G_{11}^{hk} + G_{22}^{hk})\delta_{ij}](x, y) \\ \times s_{hk}(y) \dot{\lambda}(y) dS_y + [\chi_{ij}^{hk} - \nu(\chi_{11}^{hk} + \chi_{22}^{hk})\delta_{ij} \\ - 2\mu(1+\nu)\delta_{ij}\delta_{hk}] s_{ij}(x) s_{hk}(x) \dot{\lambda}(x) = 0$$

avec :

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\sigma_{kk}}{3}(1+\nu)\delta_{ij}$$

i, j, h, k prenant les valeurs 1, 2.

Une équation analogue à (III.10) dans le cas tridimensionnel ou à (III.11) dans le cas des problèmes en déformation plane nous permet théoriquement de calculer $\dot{\lambda}$ si les tenseurs d'influences correspondant sont connus. Puis on évalue $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ par (III.8.) et ensuite l'accroissement des contraintes σ_{ij} .

(1) Elle est identique à la partie singulière du tenseur de MELAN [27].

Dans le problème élastoplastique plan de la fissure soumise à une tension uniforme à l'infini perpendiculairement à son plan, il faut superposer à la solution élastique (notée 0), la solution du problème élastique avec les forces fictives (III.6.) et les conditions aux limites mixtes suivantes :

(la fissure occupant la région $-1 < x < 1, x_2 = 0$) (fig. III.1)

$$u_2(x, 0) = 0 \quad , \quad |x_1| > 1$$

$$\sigma_{12}(x, 0) = 0 \quad \forall x_1$$

$$\sigma_{22}(x, 0) = 0 \quad |x_1| \leq 1$$

Le tenseur d'influence peut s'obtenir comme cas particulier des résultats de TWEEDS[41] qui a étudié le problème de la fissure dans un solide élastique soumis à des forces de volumes symétriquement distribuées.

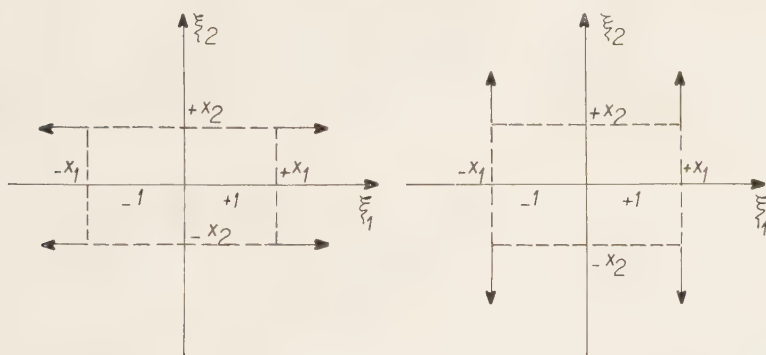


FIG. III.1

Pour cela, il nous suffit de considérer le système particulier de forces unités :

$$(1) \quad x_1(x_1, x_2) = [\delta(\xi_1 - x_1) - \delta(\xi_1 + x_1)] [\delta(\xi_2 + x_2) + \delta(\xi_2 - x_2)] \quad , \quad x_2 = 0$$

$$(2) \quad x_1 = 0 \quad , \quad x_2(x_1, x_2) = [\delta(\xi_1 + x_1) + \delta(\xi_1 - x_1)] [\delta(\xi_2 - x_2) - \delta(\xi_2 + x_2)]$$

δ distribution de Dirac.

Nous trouvons tout calcul fait :

$$\begin{aligned} T_{11}^i(x, y) &= \frac{2}{\pi \beta^2} \int_0^\infty \cos(\eta_1 y_1) \sin(\eta_1 x_1) d\eta_1 \\ &\int_0^\infty \frac{\cos(\eta_2 y_2) \cos(\eta_2 x_2)}{(\eta_1^2 + \eta_2^2)^2} [\eta_1 \eta_2^3 (3\beta^2 - 2) + \beta^2 \eta_1^3] d\eta_2 \\ &- \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \psi^{(1)}(\eta_1) e^{-\eta_1 y_2} \cos(\eta_1 y_1) (1 - \eta_1 y_2) d\eta_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{22}^1(x, y) &= \frac{2}{\pi \beta^2} \int_0^\infty \cos(\eta_1 y_1) \sin(\eta_1 x_1) d\eta_1 \\ &\int_0^\infty \frac{\cos(\eta_2 y_2) \cos(\eta_2 x_2)}{(\eta_1^2 + \eta_2^2)^2} [\eta_2^3 (\beta^2 - 2) - \beta^2 \eta_1 \eta_2^3] d\eta_2 \\ &\quad - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \psi^{(1)}(\eta_1) e^{-\eta_1 y^2} \cos(\eta_1 y_1) (1 + \eta_1 y_2) d\eta_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{12}^1(x, y) &= T_{21}^1(x, y) = -\frac{2}{\pi \beta^2} \int_0^\infty \sin(\eta_1 y_1) \sin(\eta_1 x_1) d\eta_1 \\ &\int_0^\infty \frac{\sin(\eta_2 y_2) \cos(\eta_2 x_2)}{(\eta_1^2 + \eta_2^2)^2} [(2 - \beta^2) \eta_1^3 \eta_2 + \beta^2 \eta_2^3] d\eta_2 \\ &\quad - \frac{2 y_2}{\pi} \int_0^\infty \eta_1 \psi^{(1)}(\eta_1) e^{-\eta_1 y^2} \sin(\eta_1 y_1) d\eta_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{11}^2(x, y) &= \frac{2}{\pi \beta^2} \int_0^\infty \cos(\eta_1 y_1) \cos(\eta_1 x_1) \\ &\int_0^\infty \frac{\cos(\eta_2 y_2) \sin(\eta_2 x_2)}{(\eta_1^2 + \eta_2^2)^2} [(\beta^2 - 2) \eta_2^2 - \beta^2 \eta_1^2 \eta_2] d\eta_2 \\ &\quad - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \psi^{(2)}(\eta_1) e^{-\eta_1 y^2} \cos(\eta_1 y_1) (1 - \eta_1 y_2) d\eta_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{22}^2(x, y) &= \frac{2}{\pi \beta^2} \int_0^\infty \cos(\eta_1 y_1) \cos(\eta_1 x_1) \\ &\int_0^\infty \frac{\cos(\eta_2 y_2) \sin(\eta_2 x_2)}{(\eta_1^2 + \eta_2^2)^2} [(3\beta^2 - 2) \eta_1^2 \eta_2 + \beta^2 \eta_2^3] d\eta_2 \\ &\quad - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \psi^{(2)}(\eta_1) e^{-\eta_1 y^2} (1 + \eta_1 y_2) d\eta_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{12}^2(x, y) &= -\frac{2}{\pi \beta^2} \int_0^\infty \sin(\eta_1 y_1) \cos(\eta_1 x_1) d\eta_1 \\ &\int_0^\infty \frac{\sin(\eta_2 y_2) \sin(\eta_2 x_2)}{(\eta_1^2 + \eta_2^2)^2} [(2 - \beta^2) \eta_1 \eta_2^2 + \beta^2 \eta_1^3] d\eta_2 \\ &\quad - \frac{2 y_2}{\pi} \int_0^\infty \eta_1 \psi^{(1)}(\eta_1) e^{-\eta_1 y^2} \sin(\eta_1 y_1) d\eta_1 \end{aligned}$$

où :

$$\beta^2 = 2(1 - \nu)$$

$$\psi^{(i)}(\eta_1) = \eta_1 \int_0^1 t q^{(i)}(t) J_0(\eta_1 t) dt, \quad q^{(i)}(t) = \int_0^t \frac{P^{(i)}(s) ds}{(t^2 - s^2)^{1/2}} \quad i = 1, 2$$

avec :

$$\begin{aligned} P^{(1)}(s) &= \frac{4}{\pi^2 \beta^2} \int_0^\infty \cos(\eta_1 s) d\eta_1 \\ &\int_0^\infty \frac{\sin(\eta_1 x_1) \cos(\eta_2 x_2)}{(\eta_1^2 + \eta_2^2)^2} [(\beta^2 - 2) \eta_1^3 - \beta^2 (\eta_1 \eta_2^3)] d\eta_2 \end{aligned}$$

$$P^{(2)}(s) = \frac{4}{\pi^2 \beta^2} \int_0^\infty \cos(\gamma_1 s) d\gamma_1$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\gamma_1 x_1) \sin(\gamma_2 x_2)}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} [(3\beta^2 - 2)\gamma_1^2 \gamma_2 + \beta^2 \gamma_1^3] d\gamma_2$$

A cause des expressions complexes du tenseur d'influence, l'application numérique n'est pas immédiate.

Cependant avec les procédés actuels de calcul par ordinateur, on peut évaluer point par point les valeurs du tenseur d'influence pour un problème aux limites donné. La méthode de calcul est alors intéressante car elle permet de connaître l'évolution des déformations plastiques et des contraintes au cours de la charge.

III.3. PROPAGATION DES FISSURES.

La propagation de la macrofissure de fatigue à ses débuts se fait par réunion de fissures formées durant les premières périodes (périodes 1 et 2) dans les grains situés aux endroits où il existe de fortes concentrations de contraintes. Elle est essentiellement discontinue.

Lorsque la macrofissure atteint une certaine taille, du fait de l'affaiblissement de l'échantillon, le caractère de la propagation est modifié : on peut observer en avant de la fissure une zone de déformation plastique et un schéma de calcul élastoplastique pourrait s'appliquer, alors que des considérations macroscopiques n'étaient pas apparues pour la première phase (celle de nucléation et de début de propagation).

La macrofissure catastrophique se propage en général perpendiculairement à la direction de plus grande tension. Ce fait apparente les ruptures de fatigue aux ruptures fragiles ; il peut se comprendre lorsqu'il s'agit de la première phase de la propagation sur des exemples étudiés plus loin. Pour donner une explication sur la direction suivie par la fissure pendant la deuxième phase, il faut tenir compte de la perturbation du champ de contrainte due à la fissure. Comme il a été mentionné au paragraphe précédent, malgré les efforts déployés, ce problème difficile n'a pas reçu jusqu'à présent de solution définitive.

L'étude cinématique de la fissuration sous chargement cyclique peut être facilitée (et surtout raccourcie) par l'analogie que nous constatons entre les surfaces de rupture par fatigue et les ruptures fragiles. Dans les expériences classiques de rupture par traction, cette analogie est évidente : le plan moyen de la rupture est toujours perpendiculaire à la direction de plus grande tension. Nous nous limitons dans ce qui suit à l'étude de la formation et de la propagation de la fissure à ses débuts.

Les montées avec formation de lacunes, génératrices de microfissures se produisent surtout dans les zones de glissement. La concentration en crans y est en effet beaucoup plus importante, car des crans supplémentaires se forment lors de croisements de systèmes de dislocations différents. Les zones

de glissements dans les grains sont donc des parties faibles par où la fissure passera. La macrofissure se forme par réunion de fissures existant dans les grains mal orientés et mal situés (au voisinage de défauts).

Examinons la direction de propagation de ces fissures à ses débuts. En général, elles se développent dans un plan perpendiculaire au plan de plus grande tension alors que les fissures dans les grains correspondent à des plans de cisaillement maximal. Une bonne étude a été faite par PETERSON [34] et nous en reproduirons quelques conclusions essentielles.

Exemples :

a. Fissure de fatigue en tension.

Sur un échantillon soumis à la tension, les plans de cisaillement maximal enveloppent un cône d'axe parallèle à la direction de la traction dont l'angle au sommet vaut 45° . Les traces de ces plans dans un plan diamétral sont des droites dont l'angle avec la perpendiculaire à la direction de plus grande tension est compris entre 0 et $\pm 45^\circ$ (fig. III.2.). Étant donné le grand nombre

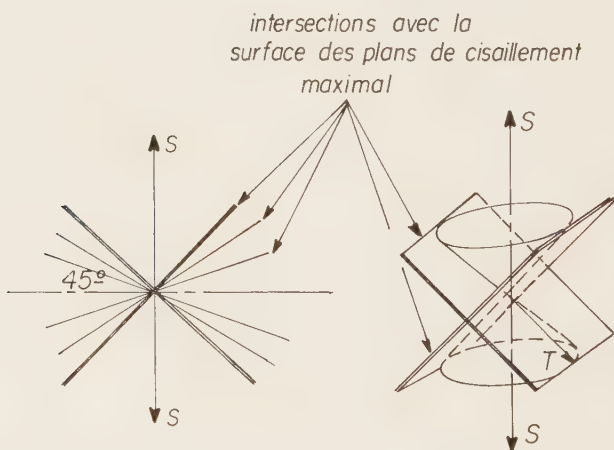


FIG. III.2

de grains, on peut considérer qu'il existe autant de grains dont les plans de glissement sont compris entre 0 et 45° que de grains dont les plans de glissements sont compris entre 0 et -45° et avec la même distribution aléatoire.

Le trajet de la macrofissure est en zigzag; sa direction moyenne est perpendiculaire à la direction de plus grande tension (fig. III.3.).

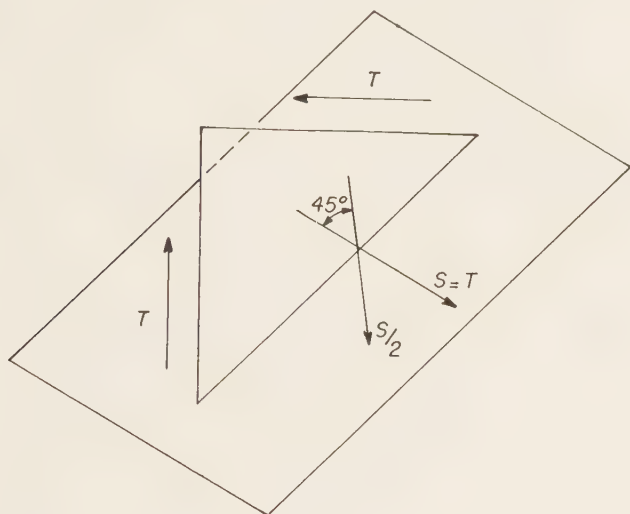


FIG. III.3

b. Fissure de fatigue en torsion.

Les fissures de fatigue en torsion se produisent dans des plans inclinés à 45° par rapport à l'axe de la torsion, plans qui correspondent à des directions de traction maximale.

L'état de contrainte en torsion est le suivant : sur des plans faisant 45° avec l'axe de la torsion agissent des contraintes de tension et de compression dont la valeur S est égale à la valeur de torsion T . Sur un plan faisant un angle de 45° avec le plan de la fig. III.3 le cisaillement vaut seulement $T/2$. Par conséquent, en torsion on n'a pas autant de plans de glissement qu'en traction et il n'y aura *grosso modo* que deux plans de fissure dans les grains, plans qui subissent les glissements les plus importants. Comme dans le cas précédent la macrofissure aura un cheminement en zigzag selon un plan moyen normal à la direction de plus grande tension.

CHAPITRE IV

RUPTURE PAR FATIGUE DES RAILS SOUS LE TRAFIC

L'endommagement du champignon des rails sous le trafic se produit de plusieurs façons :

- par écaillage ou arrachement de métal de la surface de roulement ou du congé de roulement les deux ayant chacun une origine différente;
- par fissuration horizontale sous la surface de roulement; la rupture est due à la présence de bancs d'inclusions de silicates qui constituent des zones de faiblesses dans le métal;
- par tache ovale qui nous intéresse plus particulièrement.

Il s'agit d'un phénomène de fatigue interne sous des conditions très complexes de contraintes. La fissure de fatigue est généralement amorcée sur une inclusion située entre 8 et 16 mm de la table de roulement et se propage ensuite de préférence vers le bas du champignon.

Un régime de contraintes initiales d'origine thermomécanique s'établit dans le champignon du rail pendant la fabrication (laminage, refroidissement, dressage). D'autre part on trouve, dans l'acier du rail, des inclusions de différentes forme et structure chimique. La résistance du rail est fortement influencée par ces inclusions. En attendant la mise en voie, le rail subit « un vieillissement », c'est-à-dire des modifications métallurgiques accompagnées peut-être de la relaxation de certains pics de contraintes internes.

En exploitation le rail est soumis aux différents cycles de contraintes :

- a. Contraintes hertziennes, au voisinage de la surface de contact rail-roue, qui dépendent de la charge et du diamètre des roues (P et D);
- b. Contraintes dues à la flexion (flexion verticale et horizontale et torsion du rail, flexion du champignon sur l'âme) qui dépendent de la charge P, des caractéristiques du rail (ex. son poids g kg/m) et l'élasticité du ballast;
- c. Contraintes thermiques, surtout régimes été-hiver dans les rails soudés.

Dans les conditions normales d'exploitation, le rail s'adapte aux contraintes imposées et un régime permanent des contraintes résiduelles s'établit. En fait, les contraintes initiales changent sensiblement seulement dans une zone restreinte (une dizaine de mm au maximum) sous la surface de roulement et un cycle de contraintes élastique s'établit autour des valeurs résiduelles.

La fatigue se produit sous l'effet de ce cycle élastique; la présence des inclusions comme endroits d'initiation de fissures y joue un rôle prépondérant.

Malgré le nombre d'effets différents qui jouent ici un rôle, on peut s'apercevoir de certaines régularités dans le phénomène des T.O. (concernant notamment la profondeur de l'initiation et la direction de la propagation) qui montrent que certains effets mécaniques sont prépondérants. On peut constater d'ailleurs qu'il existe de bons et de mauvais lots de rails qui dépendent surtout de la nature des inclusions, comme on peut s'attendre dans un phénomène de fatigue; d'autre part certains effets semblent jouer un rôle secondaire — exemple : position du défaut par rapport aux traverses — aussi dans les courbes ou sur des sections de freinage d'autres défauts apparaissent mais pas une augmentation particulière du nombre des T.O.

Étant donné le caractère aléatoire et accidentel des ruptures par tache ovale, on ne peut pas espérer obtenir une prévision absolue sur la tenue en fatigue du rail. On essaie toutefois d'avoir des renseignements comparatifs utiles afin d'apprécier l'accroissement des dangers de rupture quand on fait varier les paramètres de charge. Ceci nécessite la recherche d'une explication rationnelle du phénomène de la T.O. et ne peut être fait à partir des conceptions classiques de la fatigue qui attribuent un rôle primordial à l'amplitude du cisaillement indépendamment d'autres facteurs. Ainsi les endroits de l'initiation des fissures se situent à des profondeurs plus importantes que celles suggérées par les critères classiques. Les sollicitations du rail sous le trafic étant très complexes, les critères de Sines et de Crossland qui tiennent compte de l'influence de la pression hydrostatique ne sont pas applicables.

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'appliquer quelques résultats trouvés à partir du modèle développé dans le chapitre I (notamment le critère pratique qu'il suggère) à l'étude du phénomène de la tache ovale. Pour pouvoir s'approcher de la réponse, il faut connaître :

- i. Le régime de contraintes initiales et résiduelles;
- ii. Le cycle de contraintes dans le domaine élastique.

L'évaluation des contraintes initiales et résiduelles a été faite de façon expérimentale par deux méthodes différentes. Les résultats obtenus montrent que :

— dans le rail neuf, il existe au voisinage de la surface de roulement des contraintes de tractions importantes;

— sous l'effet du trafic, la traction est en partie effacée; il règne des compressions en surface tandis que les tractions subsistent plus en profondeur.

Le cycle élastique comprend les contraintes hertziennes, les contraintes de flexion du rail sur le ballast, les contraintes de flexion du champignon sur l'âme.

Les calculs des contraintes hertziennes ont été effectués en se servant des formules de THOMAS et HOERSCH [42] qui donnent les contraintes élastiques dans un solide semi-infini sous l'action d'une roue chargée. Cette approximation est justifiée par le fait que la zone de contact est faible vis-à-vis des dimensions du champignon. Pour mieux approcher la réalité rail, nous avons superposé à ces contraintes les contraintes de flexion du champignon sur l'âme.

Les caractéristiques pris en compte pour le calcul élastique sont les suivants :

Rail U 36 : inertie : $2\,000\text{ cm}^4$;

hauteur du champignon à partir de l'axe neutre : $7,6\text{ cm}$;

$E = 20.000\text{ kg/mm}^2$;

On assimile la section du champignon à un rectangle de $6 \times 4\text{ cm}^2$.

Voie : module de réaction du ballast : $k = 2\text{ kg/mm}^2$;

Roue : rayon de la roue 50 cm ;

rayon de courbure transversale 20 cm ;

charge appliquée 10 tonnes .

Les calculs ont été faits pour le plan de symétrie longitudinal du contact du rail roue.

L'état des contraintes en régime établi s'obtient par superposition des contraintes élastiques et des contraintes résiduelles mesurées.

Le calcul à la fatigue selon le critère pratique proposé a été fait de la manière suivante :

On se fixe un point situé à une profondeur donnée du plan de symétrie longitudinal. On calcule pour une position de la roue.

i. Le cisaillement macroscopique $T\alpha$ qui s'exerce sur un plan fixe faisant l'angle α avec la verticale.

ii. La pression hydrostatique p .

Sur la figure IV.1., on porte T_{30} en fonction de la pression hydrostatique p en suivant le cycle de charge.

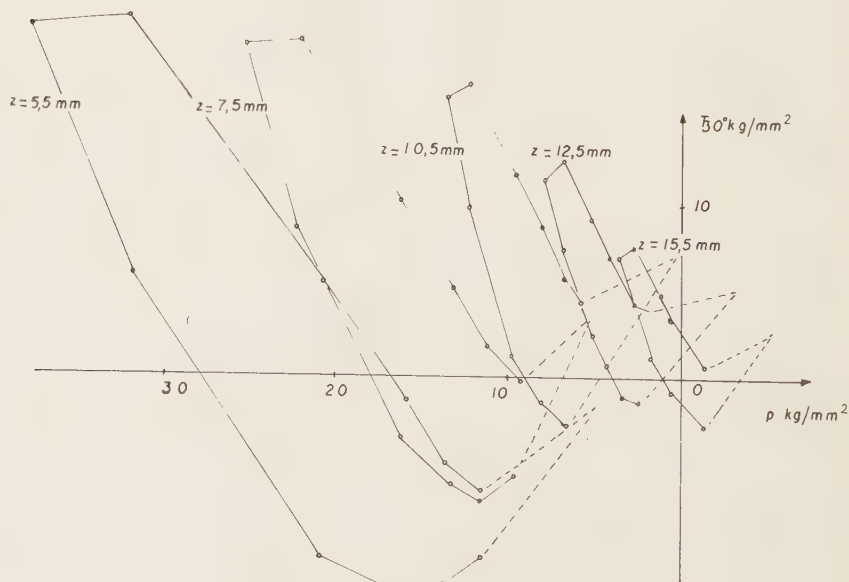


FIG. IV.1

On a représenté ensuite schématiquement sur la figure IV.2 les cisaillements $\tau_{\alpha m}$ ($\alpha = 30^\circ, 45^\circ$) en fonction de la pression hydrostatique. Pour le point situé à la profondeur de $-5,5$ mm de la surface de roulement où des défor-

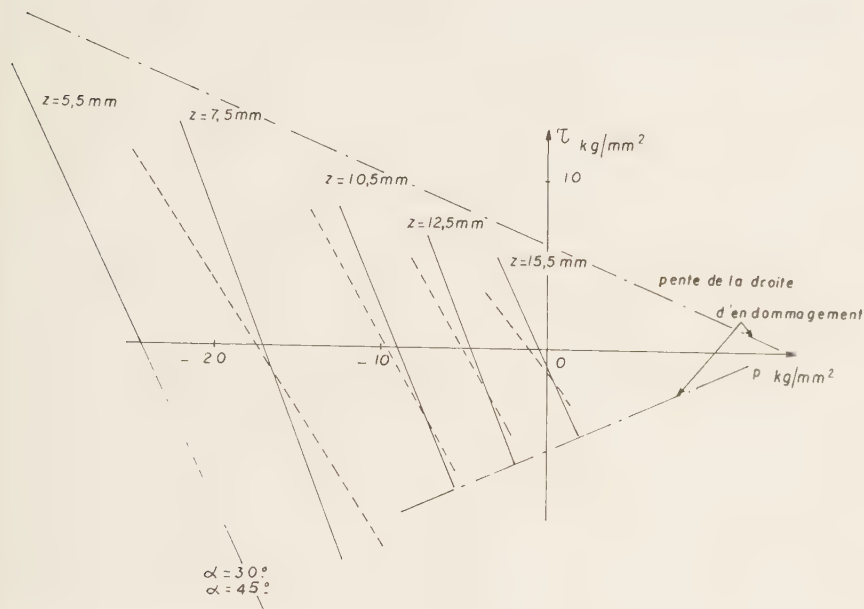


FIG. IV.2

mations importantes se produisent, nous avons fait figurer à titre de comparaison le cisaillement macroscopique et celui obtenu à partir du modèle proposé.

Notons que l'interprétation des résultats ne peut être faite convenablement que si l'on connaît les droites d'endommagement du rail à différentes profondeurs. Il est probable, et les premières mesures semblent le confirmer, que ces droites se déplacent dans le diagramme (τ, p) au fur et à mesure qu'on s'enfonce pour se stabiliser ensuite à partir d'une certaine profondeur.

Nous pouvons faire les remarques suivantes :

— en surface, des déformations importantes se produisent et la méthode d'évaluation du cisaillement local peut être en défaut. A la profondeur de $-5,5$ mm, le cisaillement $\tau_{\alpha m}$ est important, toutefois la pression hydrostatique est également très élevée ce qui empêche la fatigue de se produire. Il en est de même, bien que à un degré moindre, de la profondeur de $7,5$ mm;

— pour comparer les dangers de rupture aux points situés plus en profondeur où les déformations plastiques macroscopiques sont négligeables, nous avons tracé sur la même figure la pente de la droite d'endommagement obtenue à partir des résultats expérimentaux classiques du paragraphe II.2. On s'aper-

çoit que les dangers sont à peu près les mêmes pour les points situés à 10,5, 12,5 et 14,5 mm. L'amorce de la fissure de fatigue dépend de la présence d'un défaut qui y concentre les contraintes;

— en faisant varier les paramètres de charge, nous avons pu apprécier par cette méthode leur influence sur la tenue en fatigue du rail ainsi que le danger relatif de rupture par tache ovale. Ces résultats sont publiés dans [48].

CONCLUSION

L'étude théorique précédente à l'aide d'un modèle relativement simple nous a permis d'analyser du point de vue de la mécanique les différentes phases de la fatigue. En nous intéressant à l'endurance, nous nous sommes efforcé de tenir compte dans notre description du trajet de charge, facteur qui est généralement laissé de côté dans les travaux antérieurs. Cette étude s'appuie sur l'aspect local du phénomène de fatigue : pour évaluer le cycle de contraintes locales qui règnent dans les grains les plus défavorablement orientés, nous avons proposé une méthode en généralisant un modèle d'Orowan. Quant aux lois d'endommagement locales, nous en avons postulé une qui est suggérée par la théorie des dislocations et qui peut s'interpréter comme une condition pour que des trous puissent se former. En partant de telles hypothèses, nous avons pu retrouver l'allure des courbes d'endurance pour des chargements très différents.

Cette démarche et les résultats qui en découlent nous semblent présenter un triple intérêt.

D'une part nous pouvons rendre compte du trajet de charge et unifier de cette manière les différents résultats expérimentaux existants. Nous avons montré qu'en première approximation les paramètres importants à considérer sont à un instant donné le cisaillement local (qui est relié à l'amplitude du cisaillement macroscopique) et, la pression hydrostatique concomitante. Cette méthode permet ainsi le calcul à la fatigue de structures soumises à des chargements complexes.

D'autre part le problème des concentrations de contraintes peut être posé d'une façon beaucoup plus satisfaisante car les conditions de fatigue font intervenir de façon complexe le tenseur des contraintes macroscopiques de sorte que la caractérisation habituelle des concentrations de contraintes par un seul coefficient est trop imprécise.

Enfin la décomposition du mécanisme en différentes phases ainsi que les méthodes d'études développées fournissent un cadre pour des recherches ultérieures et pourront s'appliquer de façon analogue avec des hypothèses de base élargies. Il s'agit avant tout d'améliorer nos connaissances sur les points suivants :

— lois d'écrouissage du monocristal sous des chargements cycliques. Nous avons supposé pour simplifier un écrouissage isotrope et un seul système de glissement actif. Pour pouvoir envisager le cas des glissements multiples, il

faut étudier de façon plus précise les interactions possibles de différents systèmes de glissement. Ce problème très important constitue un sujet de recherche complexe.

— détermination plus précise des mécanismes physiques susceptibles de provoquer des endommagements. De tels mécanismes doivent toutefois faire intervenir à la fois le cisaillement et la pression hydrostatique. A cet égard nous avons laissé de côté le rôle possible des joints de grains qu'il faudrait certainement approfondir.

En conclusion, malgré la simplicité des hypothèses utilisées pour définir le modèle, nous avons pu rendre compte qualitativement et dans une certaine mesure quantitativement de la plupart des résultats d'endurance connus en fatigue. Le critère pratique qui en résulte est actuellement utilisé pour des applications intéressantes.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] B. A. BILBY et A. H. COTTRELL, K. H. SWINDEN, *Proc. Roy. Soc.*, London A, 272. — 1963, 304.
- [2] H. D. BUI. — *Thèse de doctorat ès sciences*, Paris, 1969.
- [3] H. D. BUI et K. DANG VAN. — *Int. J. Sol. and Structures*, vol. 6, 1970, 183.
- [4] F. P. BULLEN, A. K. HEAD et W. A. WOOD. — *Proc. Roy. Soc.*, London A 218, 1953, 332.
- [5] R. CAZAUD, G. POMEY, P. RABBE et C. JANSSEN. — *La fatigue des métaux*, éd. Dunod, 1969, p. 325.
- [6] A. H. COTTRELL et D. HULL. — *Proc. Roy. Soc.*, London, A 242, 1957, 211.
- [7] B. CROSSLAND. — *Int. Conf. on Fatigue of Metals*, London, 1956, 138.
- [8] B. CROSSLAND, J. C. MORRISON et J. S. C. PARRY. — *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, London, vol. 170, p. 897. 1956.
- [9] J. E. DORN, J. A. SIMMONS et J. D. CAMPBELL. — *J. of. Appl. Mech.*, septembre 1961
- [10] DUGDALE. — *J. Mech. Phys. Solids*, 8, 100, 1960.
- [11] J. D. ESHELBY. — *Progress in Solid Mech.*, vol. II, North Holland (1960).
- [12] C. E. FELTNER. — *Phil. Mag.*, G. B., 1965, 12, n° 120, 1229-1248.
- [13] P. J. E. FORSYTH. — *J. Int. Metals*, vol. 80, décembre 1951, 181-188.
- [14] J. FRIEDEL. — *Dislocations*, Pergamon, 1964.
- [15] H. J. GOUGH. — *Proc. A.S.T.M.* 33, 1933, 3.
- [16] H. J. GOUGH et H. V. POLLARD. — *Proc. Inst. Mach. Engrs.*, 1935, 131.
- [17] A. A. GRIFFITH. — *Phil. Trans. Roy. Soc.*, 221, 1920, 163.
- [18] A. K. HEAD. — *Phil. Mag.*, 44, 1953, 925.
- [19] J. A. H. HULT et F. A. Mc CLINTOCK. — *Proc. Ninth Int. Congress Appl Mech.*, 8. 51.
- [20] J. W. HUTCHINSON. — *J. of Mech. and Phys. of Solids*, vol. 16, n° 1, janv 1968
- [21] E. KRÖNER. — *Acta Mech.*, 1961, 9, 155.
- [22] R. W. LARDNER. — *Int. J. of Fract, Mech.*, n° 3, vol. 4, 1968.

- [23] T. H. LIN, D. MARTIN et S. UCHIYAMA. — *J. Mech. Phys. Solids*, 9, 200, 1961.
- [24] E. S. MACHLIN. — *N.A.C.A. T.N.*, n° 1489, 1948; *Fracturing of Metals*, 1948, 282 (*A.S. T.M.*); *N.A.C.A. Tech. Rep.*, n° 929, 1949.
- [25] J. MANDEL. — *Cours de mécanique des milieux continus*, Gauthier-Villars, 1966.
- [26] A. N. MAY. — *Nature*, 185, 303, 1960.
- [27] E. MELAN. — *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 12, 1932.
- [28] N. F. MOTT. — *Acta Met.*, 6, 195, 1955.
- [29] F. NAKANISHI. — *Trans. Mech. Soc.*, Japon, 18, 1952, 104, 110, 114, 118.
- [30] N. NEUBER. — *J. Appl. Mech.*, 28, 544.
- [31] I. A. ODING. — *Colloque de fatigue I.U.T.A.M.*, Stockholm, mai 1955.
- [32] E. OROWAN. — *Proc. Roy. Soc.*, London, A, 171, 1939, 79.
- [33] P. C. PARIS et G. C. SIH. — *A.S.T.M. Spec. Techn. Publ.*, U.S.A., n° 381, 30-83.
- [34] R. E. PETERSON. — *Metal Fatigue*, University of California, *Engineering Extension Series*, Mc Graw Hill, 1959, p. 68-86.
- [35] J. R. RICE. — *J. Appl. Mech.*, 34, 237.
- [36] J. R. RICE et ROSENGREEN. — *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 16, n° 1, janvier 1968.
- [37] M. ROS. — *Die Bruchgefahr fester Körper, E.M.P.A. Bericht*, 173, Zurich, 1950.
- [38] G. M. SINCLAIR et T. L. DOLAN. — *Trans. A.S.T.M.*, 75, 1953, 867.
- [39] G. SINES. — *Metal Fatigue*, University of Californie, *Engineering Extension Series*, Mc Graw Hill, 1959, 145-189.
- [40] STANFIELD. — *Written discussion, Proc. Inst. Mech. Engrs.*, 131, 1935, p. 93.
- [41] J. TWEEDS. — *Int. J. Eng. Sc.*, vol. 7, n° 8, 1969, p. 815.
- [42] H. R. THOMAS et V. A. HOERSCH. — *University Of Illinois, Bulletin*, n° 46, vol. XXVII, 1960.
- [43] N. THOMPSON. — *Proc. Int. Conf. on the Atomic Mech. of Fract.*, 1959. Tech. Press M.I.T. et John Wiley and Sons, New York, 1959.
- [44] J. WEERTMANN. — *Int. J. of. Frac. Mech.*, n° 2, juin 1966.
- [45] W. A. WOOD. — *Fatigue in Aircraft Structures*, Academic Press, New York, 1956.
- [46] T. YOKOBORI. — *Strength, Fracture and Fatigue of materials*, Noordhoff, Groningen, The Netherlands, 1965.
- [47] J. ZARKA. — *Thèse de doctorat ès sciences*, Paris 1969.
- [48] *Rapport partiel, n° 7, du comité C 53*, Office de recherches et d'essais de l'Union internationale des chemins de fer, Utrecht, Hollande (à paraître).

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
Résumé (français, anglais, allemand).....	647
INTRODUCTION.....	649
 I. MODÈLE DE NUCLÉATION DES FISSURES DE FATIGUE.....	 654
I.1. <i>Description du modèle</i>	654
I.2. <i>Nucléation des microfissures dans le monocristal</i>	657
I.3. <i>Évaluation de l'écrouissage</i>	661
I.4. <i>Détermination des limites d'endurance dans le cas d'un métal C.F.C.</i>	670
 II. CRITÈRES DE FATIGUE ET JUSTIFICATIONS EXPÉRIMENTALES.....	 685
II.1. <i>Analyse des critères existants</i>	686
II.1.1. Critère du type de NAKANISHI-YOKOBI-STANFIELD.....	686
II.1.2. Critère de GOUGH-POLLARD.....	687
II.1.3. Critère de SINES.....	688
II.1.4. Critère du CROSSLAND.....	690
II.2. <i>Juxtapositions de quelques résultats expérimentaux concernant différents métaux</i>	692
II.3. <i>Justification expérimentale des hypothèses sur la loi d'écrouissage du monocristal</i>	697

	Pages
III. CONCENTRATION DES CONTRAINTES ET PROPAGATION DES FISSURES.....	700
III.1. <i>Remarques préliminaires</i>	700
III.2. <i>Nouvelles méthodes de calcul des concentrations de contraintes au voisinage de défauts</i>	703
III.2.1. Calcul des concentrations de contraintes dues à une inclusion de forme quelconque.....	703
III.2.2. Calcul des contraintes autour d'une fissure dans un milieu élasto-plastique.....	706
III.3. <i>Propagation des fissures</i>	711
IV. RUPTURE PAR FATIGUE DES RAILS SOUS LE TRAFIC.....	714
CONCLUSION.....	718
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	719

